Alexander Ziwet

GRUNDRISS

EINER

ELEMENTAR-GEOMETRISCHEN

KEGELSCHNITTSLEHRE

VON

H. G. ZEUTHEN.



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1882.

Alexander Ziwet

GRUNDRISS

EINER

ELEMENTAR-GEOMETRISCHEN

KEGELSCHNITTSLEHRE

VON

H. G. ZEUTHEN.



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1882.

Vorwort.

Die elementar-geometrische Kegelschnittslehre, die ich hier dem grösseren deutschlesenden Publicum übergebe, nachdem ich sie schon im Jahre 1878 in der dänischen „Tidsskrift for Mathematik“ dargestellt hatte, ist aus einer mehrmals an der Kopenhagener Universität gehaltenen Vorlesung hervorgegangen. Ich hielt sie zum ersten Male im Jahre 1868, unmittelbar, nachdem ich durch die von Geiser publicirten Vorlesungen Jacob Steiners erfahren hatte, dass und wie dieser grosse Geometer dieselbe Aufgabe behandelte. Obwohl ich mich schon früher ziemlich viel mit elementar-geometrischen Beweisführungen beschäftigt hatte, indem ich schon in meinen Studienjahren durch die Bildung solcher aus der analytischen und projectivischen Geometrie bekannten Kegelschnittssätze mir eine sehr nützliche Uebung zu verschaffen pflegte[1], so musste doch die Steiner'sche Vorlesung einen nicht geringen Einfluss auf die meinige haben. Oft habe ich seine Beweise wieder erfunden, wo ich glaubte selbständig zu arbeiten; und wo es, in meinen Bestrebungen noch elementarer zu sein, mir gelungen ist Pläne durchzuführen, die von den seinigen verschieden sind, mag oft eine Anregung von Steiner mir dazu geholfen haben die dabei verbundenen Schwierigkeiten zu überwinden. Ausdrücklich citire ich jedoch nur Steiner und andere Verfasser nur da, wo ich bewusst und unmittelbar ihre Beweisführung benutze; die meisten behandelten Sätze sind ja schon längst Gemeingut.

Mein Büchlein ist namentlich für die Studirenden bestimmt. Eben weil die Kegelschnittslehre das wichtigste Material

1) Nur die auf die Brennpunktseigenschaften gestützte Beweisführung der ersten und am nächsten liegenden Hauptsätze kam schon damals zur Publication (Tidsskrift for Mathematik 1863).

ist zur Einübung der analytischen und der projectivischen Geometrie, welche wiederum die umfassendsten allgemeinen Gesichtspunkte für diese Lehre geben, ist es nützlich sich dieselbe Fundamentslehre auch von einer andern Seite anzueignen, wo der Zusammenhang der einfachsten Sätze sich einfacher gestaltet, als wenn diese von den genannten höheren Standpunkten, in Verbindung mit schwierigeren Sätzen, betrachtet werden. Die Mühe solche Zusammenhänge zu betrachten wird sich nachher in fast jeder geometrischen Untersuchung lohnen.

Es ist aber noch nützlicher die elementaren Beweise so weit möglich zu finden als sie zu beweisen. Ausser den beigefügten Uebungsaufgaben soll die knappe Form der Darstellung mehrerer Beweise den Lesern, die es wünschen, Gelegenheit zu einer solchen nützlichen Uebung geben. In kurzen Anweisungen und in Hinweisen auf frühere Sätze wird nämlich alles gegeben, was zur vollständigen Beweisführung nöthig ist, und der Leser kann dann nach eigenem Bedarfe mehr oder weniger daraus benutzen. Grundlegende Beweise und solche, wo man sich irren könnte, sind vollständig ausgeführt.

Nachdem ich die vorliegende deutsche Bearbeitung begonnen hatte, erfuhr ich, dass die elementar-geometrische Kegelschnittslehre in manche deutsche Gymnasien eingeführt ist, wozu schon mehrere geeignete Lehrbücher entstanden sind. Ich konnte aber nicht ohne Einschränkungen mein Büchlein direct für denselben Unterricht abmessen, bin auch dazu mit den Voraussetzungen auf den deutschen Gymnasien zu wenig bekannt. Jedoch halte ich es für möglich, dass Gymnasiallehrer selbst aus meinem Schriftchen eine passende Auswahl für ihren Unterricht treffen können. Nur wird es zu beobachten sein, dass die Abschnitte II und III, welche die Grundlage der folgenden Untersuchungen enthalten, vollständig durchzunehmen sind. Für die folgenden Abschnitte wird die Auswahl — über welche man ja, wenn nöthig, mit mir conferiren kann — bedeutend freier.

Ich habe nur noch zu bemerken, dass die vorliegende deutsche Bearbeitung zwar von mir selbst verfasst jedoch einer nothwendigen Sprachrevision durch einen deutschen Schulmann unterworfen worden ist. Diese Revision hat sich nicht nur auf eigentliche

sprachliche Unreinheiten erstreckt, sondern hat mir auch mehrmals Gelegenheit gegeben, Stellen, welche entweder der Klarheit der Darstellung oder den Gesetzen deutscher Stilistik nicht entsprachen, zu verbessern. Dafür bringe ich jenem Herrn hier meinen besten Dank, um so mehr, als die Aufgabe, die Sprache eines andern zu verbessern gar keine dankbare ist.

Kopenhagen, Juni 1882.

H. G. Zeuthen.

Inhalt.

I. Vorbereitende Sätze und Constructionen.[1])

1. Wenn wir mit mehreren Strecken auf derselben oder auf parallelen Geraden zu thun haben, so legen wir jeder Strecke AB ein Vorzeichen bei, nach dem Sinne vom Anfangspunkte A bis zum Endpunkte B. Dann ist für alle Lagen der Punkte A, B, C auf einer Geraden

$$AB = -BA$$

und
$$AB + BC = AC$$

oder
$$AB + BC + CA = 0.$$

Wir berücksichtigen auch bei der Angabe von der Gleichheit zweier Winkel den Umlaufssinn, indem wir die Namen der Winkel schreiben $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DEF$, wodurch ausgedrückt wird, dass der eine von diesen Winkeln, ohne die Ebene zu verlassen, mit dem andern so zur Deckung gebracht werden kann, dass die Gerade BA mit ED, BC mit EF zusammenfällt.

Durch die Projection eines Punktes A auf eine Gerade BC werden wir den Fusspunkt der Senkrechten von A auf BC bezeichnen.

Der Ort der Punkte, die eine gegebene Eigenschaft haben, ist die gerade oder krumme Linie, die alle solche Punkte enthält. Der Ort oder die Enveloppe der Geraden, die eine gegebene Eigenschaft haben, ist entweder ein Punkt, durch welchen alle solche Geraden gehen, oder eine Curve, welche sie berühren. So ist zum Beispiel sowohl der Ort der Punkte, als auch der Ort der Geraden, die einen gegebenen Abstand von einem gegebenen Punkte haben, der Kreis mit seinem Centrum im gegebenen Punkte und mit dem Halbmesser gleich dem gegebenen Abstande.

---

1) Diejenigen von diesen Sätzen und Constructionen, die auf die nachfolgende Kegelschnittslehre unmittelbare Anwendung finden werden, sind durch gesperrten Druck hervorgehoben. Die übrigen sind wegen des Zusammenhanges oder wegen ihrer Nutzbarkeit zur Vereinfachung späterer Constructionen mit aufgenommen.

2. Die Potenz eines Punktes P in Beziehung auf einen Kreis ist das Product $PM \,.\, PN$ der Strecken einer Geraden durch P, die durch P und die Schnittpunkte M und N der Geraden mit dem Kreise begrenzt werden. Dieses Product hat bekanntlich denselben Werth für alle Geraden durch P. Wenn A das Centrum des Kreises ist, a sein Halbmesser, so werden wir den Kreis durch (A, a) bezeichnen, und die Potenz eines Punktes P in Beziehung auf ihn durch $P(A, a)$. Wenn wir dann $PA = h$ haben, so ist

$$P(A, a) = h^2 - a^2 \gtreqless 0,$$

je nachdem P sich ausserhalb, auf oder innerhalb der Kreisperipherie befindet. Specialfall: $a = 0$.

3. Der Ort der Punkte, welche dieselbe Potenz in Beziehung auf zwei Kreise haben, ist eine auf die Centrallinie (Centrale) senkrechte Gerade. Man findet nämlich, dass die Projection eines solchen Punktes auf die Centrale völlig bestimmt ist. Man nennt die gefundene Gerade die Potenzlinie (oder die Chordalachse) der Kreise. Sie geht durch ihre Schnittpunkte, wenn sie sich schneiden; berührt sie in ihrem Berührungspunkte, wenn sie sich berühren; und ist ausserhalb beider, wenn sie ausserhalb einander liegen. Specialfälle: Der eine oder beide Kreise haben den Halbmesser Null.

4. Die Potenzlinien von je zwei und zwei von drei Kreisen gehen durch einen Punkt, den Potenzpunkt der Kreise, der dieselbe Potenz in Beziehung auf alle drei Kreise hat. Mittelst dieses Satzes kann man zur Construction der Potenzlinie zweier sich nicht schneidenden Kreise solche Kreise benutzen, die die beiden gegebenen schneiden.

5. Wenn die Kreise (A, a) und (B, b) dieselbe Potenzlinie haben wie (B, b) und (C, c), so ist diese auch die Potenzlinie von (A, a) und (C, c). Die Reihe von Kreisen, die je zwei und zwei dieselbe Potenzlinie haben, wird ein Büschel von Kreisen genannt. Die Centra dieser Kreise liegen auf einer Geraden. Kreise, die durch zwei feste Punkte gehen, oder in einem festen Punkte sich berühren, bilden einen Büschel; es giebt aber auch Büschel von Kreisen, die keinen gemeinschaftlichen Punkt haben. Ein Büschel ist durch zwei seiner Kreise, oder durch einen Kreis und die Potenzlinie bestimmt.

Aufgaben: In einem (auf diese Weise bestimmten) Büschel einen Kreis zu construiren, der entweder 1) durch einen festen Punkt geht (eine Auflösung), oder 2) eine feste Gerade berührt (höchstens zwei Auflösungen), oder 3) das Centrum

in einem gegebenen Punkte der gemeinschaftlichen Centrale hat. Die letzte Aufgabe hat immer eine Auflösung, wenn die Kreise des Büschels sich schneiden oder berühren. Sonst hat sie eine oder keine Auflösung, je nachdem das gegebene Centrum ausserhalb oder innerhalb einer gewissen Strecke EF von der Centrale liegt. Zwei Kreise des Büschels reduciren sich auf die Endpunkte E und F dieser Strecke.

6. Aufgabe: In einem gegebenen Büschel einen Kreis zu construiren, der einen gegebenen Kreis (A, a) berührt.

Auflösung. Man construire einen Kreis im Büschel, der (A, a) schneidet (5). Seine Potenzlinie mit (A, a) wird die Potenzlinie des Büschels schneiden in einem Punkte P der Potenzlinie vom gesuchten Kreise und (A, a) (4). Weil diese Potenzlinie (A, a) berühren soll (3), so wird sie dann bestimmt sein (2, 1 oder 0 Auflösungen), und der Berührungspunkt wird auch Berührungspunkt sein von (A, a) und dem gesuchten Kreise. — Wenn die Kreise des gegebenen Büchels sich nicht schneiden, wird P jedenfalls ausser (A, a) liegen, und man bekommt also zwei Auflösungen. Wenn sie sich schneiden, ist die Aufgabe identisch mit derjenigen: Durch zwei gegebene Punkte einen Kreis zu legen, der einen gegebenen Kreis (A, a) berührt. Diese Aufgabe hat zwei Auflösungen, wenn die Punkte beide ausserhalb, oder beide innerhalb des Kreises (A, a) liegen; die zwei Auflösungen werden in eine zusammenfallen, wenn der eine der gegebenen Punkte auf der Kreisperipherie von (A, a) liegt; wenn die Kreisperipherie die gegebenen Punkte trennt, bekommt man keine Auflösung. Wenn die beiden gegebenen Punkte auf einer Tangente von (A, a) liegen, wird der eine gesuchte Kreis sich auf diese Tangente, die als ein Kreis mit unendlich entferntem Centrum und also mit unendlichem Halbmesser betrachtet werden kann, reduciren.

7. Aufgabe: Durch einen gegebenen Punkt B einen Kreis zu legen, der einen gegebenen Kreis (A, a) berührt, und dessen Centrum auf einer gegebenen Geraden l liegt. — Die Aufgabe reducirt sich auf 6. dadurch, dass der Kreis auch durch den in Beziehung auf l mit B symmetrischen Punkt C gehen muss; sie hat also auch höchstens zwei Auflösungen. Dasselbe wird der Fall sein, wenn man den Kreis (A, a) mit einer Geraden, welche der gesuchte Kreis berühren soll, vertauscht.

8. Das Verhältniss der Potenz eines willkürlichen Punktes P

eines Kreises (A, a) in Beziehung auf einen andern Kreis (B, b) zum Abstande SP des Punktes P von der Potenzlinie der Kreise ist dem doppelten Centralabstande BA gleich. — Um dieses zu beweisen, zieht man durch P eine Gerade, die den Kreis (B, b) in Q und Q' schneidet; ihren andern Schnittpunkt mit (A, a) nennen wir P' und ihren Schnittpunkt mit der Potenzlinie R; dann ist

$$RP \,.\, RP' = RQ \,.\, RQ' \text{ und folglich (siehe 1.)}$$
$$P(B, b) = PQ \,.\, PQ' = (RQ - RP)(RQ' - RP)$$
$$= RQ \,.\, RQ' - (RQ + RQ')\,RP + RP^2$$
$$= RP\,(RP + RP' - RQ - RQ').$$

Weil $RP = \frac{SP}{\cos v}$, $RP + RP' - RQ - RQ' = 2\,BA \cos v$, wo v der von den Geraden PR und BA gebildete Winkel ist, wird also
$$P(B, b) = 2\,SP \,.\, BA.$$

Wenn die Kreise sich schneiden, kann man den Satz ohne Rechnung erhalten, indem man die Hülfsgerade durch einen Schnittpunkt legt.

9. Wenn P ein willkürlicher Punkt eines Kreises (A, a) in einem Büschel ist, (B, b) und (C, c) zwei andere Kreise desselben Büschels, so hat man $\frac{P(B, b)}{P(C, c)} = \frac{BA}{CA}$.

Dieser Satz folgt aus 8., kann aber auch im Falle, wo die Kreise des Büschels sich schneiden, mittelst einer Geraden von P an einen Schnittpunkt direct erhalten werden.

10. Der Ort der Punkte, deren Potenzen in Beziehung auf zwei gegebene Kreise ein gegebenes Verhältniss haben, ist — wenn es überhaupt solche Punkte giebt — ein dritter Kreis des durch die gegebenen Kreise bestimmten Büschels. — Indem wir annehmen, dass auch das Vorzeichen des Verhältnisses gegeben ist, bestimmt man das Centrum des gesuchten Kreises durch 9., und dann ihn selbst — wenn es möglich ist (5) —. Er ist der einzige Ort, weil alle anderen Punkte der Ebene auf anderen Kreisen des Büschels liegen und also anderen Werthen des Verhältnisses entsprechen. —

Specialfälle: Ein gegebener Kreis oder die beiden gegebenen Kreise reduciren sich auf Punkte. Im letzten Falle sieht man, dass der Ort der Punkte, deren Abstände von zwei gegebenen Punkten ein gegebenes Verhältniss haben, ein Kreis ist.

11. Aufgabe: Auf einer Geraden mit vier gegebenen Punkten A, B, C, D einen Punkt P so zu bestimmen, dass das Verhältniss $\frac{PA \,.\, PB}{PC \,.\, PD}$ einen gegebenen Werth bekommt. — Diese Aufgabe wird

mittelst 10 gelöst, indem man einander schneidende Kreise durch AB und CD legt.

Uebungsaufgaben.

1) In einem gegebenen Büschel einen Kreis zu finden, der auf einer gegebenen Geraden eine Sehne von gegebener Länge hat.

2) Einen Kreis zu construiren, der zwei gegebene Geraden und einen gegebenen Kreis berührt.

3) Einen Kreis zu construiren, dessen Centrum auf einer gegebenen Geraden liegt, und der zwei gegebene Kreise berührt.

4) Durch zwei gegebene Punkte einen Kreis zu legen, der mit einem gegebenen Kreise eine gemeinschaftliche Sehne von gegebener Länge hat.

5) Auf einer Geraden mit zwei gegebenen Punkten A und B einen Punkt P so zu bestimmen, dass das geometrische Mittel von PA und PB in gegebenem Verhältnisse zum Abstande des Punktes P von einem gegebenen Punkte C der Ebene steht.

---

12. Die Aehnlichkeitspunkte zweier Kreise (A, a) und (B, b) sind die Punkte E und F der Centrale, die so bestimmt werden, dass

$$-\frac{AE}{BE} = \frac{AF}{BF} = \frac{a}{b}.$$

Indem wir immer die Halbmesser als positiv rechnen, ist E hier auf AB gelegen und wird der innere Aehnlichkeitspunkt genannt, F auf der Verlängerung von AB und wird der äussere Aehnlichkeitspunkt genannt. Man kann diese Punkte als die Schnittpunkte der Centrale mit der Verbindungslinie der Endpunkte paralleler Durchmesser construiren. Solche Endpunkte paralleler Durchmesser werden entsprechend genannt in Beziehung auf den Aehnlichkeitspunkt, den sie bestimmen. Tangenten des einen Kreises, die durch den einen Aehnlichkeitspunkt gehen, werden auch den andern berühren. — Specialfälle: 1) Die Kreise berühren sich; 2) der eine Kreis hat den Halbmesser Null. (Der Fall, wo eine Gerade den einen Kreis ersetzt, wird in 20. behandelt.)

13. Zwei mit einander parallele Gerade AA_1 und BB_1 durch die Centra zweier Kreise (A, a) und (B, b) werden eine willkürliche Gerade durch einen Aehnlichkeitspunkt F in den Punkten A_1 und B_1 schneiden, die durch

$$\frac{AA_1}{BB_1} = \pm\frac{a}{b}$$

bestimmt werden, indem man + oder — liest, je nachdem F der äussere oder innere Aehnlichkeitspunkt ist (1).

Wenn umgekehrt A_1 und B_1 auf zwei parallelen Durchmessern durch die genannte Proportion bestimmt werden, geht $A_1 B_1$ durch den äusseren, resp. inneren Aehnlichkeitspunkt.

14. Die Verbindungslinie eines Aehnlichkeitspunktes der Kreise (A, a) und (B, b) mit einem Aehnlichkeitspunkte der Kreise (B, b) und (C, c) geht durch einen Aehnlichkeitspunkt der Kreise (A, a) und (C, c). 2 oder 0 dieser Aehnlichkeitspunkte sind innere. Dieser Satz folgt unmittelbar aus 13.

15. Wenn ein Kreis zwei gegebene berührt, geht die Verbindungslinie der Berührungspunkte durch einen der Aehnlichkeitspunkte der gegebenen Kreise, den äusseren oder den inneren, je nachdem die Berührungen gleichartig oder verschiedenartig sind. — Dieser Satz ist ein Specialfall von 14.

16. Jedem Aehnlichkeitspunkte F zweier Kreise (A, a) und (B, b) entspricht eine Reihe von Kreisen, welche die beiden gegebenen in je zwei Paaren von nicht entsprechenden Schnittpunkten mit Geraden durch F berühren. — Dieser umgekehrte Satz folgt auch aus 14.

17. Ein Aehnlichkeitspunkt F zweier Kreise (A, a) und (B, b) hat dieselbe Potenz in Beziehung auf alle Berührungskreise der dem Aehnlichkeitspunkte entsprechenden Reihe (16). — Man findet nämlich diese Potenz durch Multiplication der Potenz $F(A, a)$ mit $+\frac{b}{a}$ oder $-\frac{b}{a}$, je nachdem F der äussere oder innere Aehnkeitspunkt ist.

18. Aufgabe: Durch einen gegebenen Punkt P einen Kreis zu legen, der zwei gegebene Kreise (A, a) und (B, b) berührt. **Auflösung:** Wenn der gesuchte Kreis der dem Aehnlichkeitspunkte F entsprechenden Reihe gehören soll, bestimmt man mittelst (17) ihren zweiten Schnittpunkt Q mit der Geraden FP. Die Aufgabe ist so auf 6. zurückgeführt. Jedem Aehnlichkeitspunkte werden 2, 1 oder 0 Auflösungen entsprechen. Im Ganzen giebt es also bis 4 Auflösungen.

19. Aufgabe: Einen Kreis zu construiren, der drei gegebene (A, a), (B, b), (C, c) berührt. **Auflösung:** Der gesuchte Kreis wird (indem c der kleinste Halbmesser ist) mit einem durch C gehenden und sowohl einen der Kreise $(A, a \pm c)$ als einen der Kreise $(B, b \pm c)$ berührenden Kreise concentrisch sein, indem

diese Berührungen gleichartig oder verschiedenartig sind, je nachdem man in den zwei Radien $a \pm c$ und $b \pm c$ dasselbe oder verschiedene Vorzeichen hat. Bis $2 . 4 = 8$ Auflösungen.

20. Die Sätze 14—17 sind auch auf den Fall anwendbar, wo eine Gerade l den einen Kreis ersetzt, wenn man gleichzeitig die Aehnlichkeitspunkte dieses und eines andern Kreises (B, b) durch die Endpunkte des auf l senkrechten Durchmessers in (B, b) ersetzt. Sie sind leicht für diesen Fall in unveränderter Ordnung zu beweisen.

21. Aufgabe: Durch einen gegebenen Punkt einen Kreis zu legen, der eine gegebene Gerade und einen gegebenen Kreis berührt. — Wird wie 18. gelöst und hat bis 4 Auflösungen.

22. Aufgabe: Einen Kreis zu construiren, der eine gegebene Gerade und zwei gegebene Kreise berührt. (Wie 19.)

Wenn man, ohne die Auflösungen der in 5., 6., 18., 19., 21. und 22. behandelten Aufgaben zu kennen, es versuchen sollte sie zu finden, würde man wohl erst nach den geometrischen Oertern der Centra von Kreisen, die zwei der gegebenen Bedingungen erfüllen, fragen. Man wird aber dann finden, dass mehrere von diesen Oertern nicht Gerade oder Kreise sind, und also nicht unmittelbar Lösungen mittelst Lineal und Zirkel geben. Weil wir nun aber gezeigt haben, dass eine solche Lösung möglich ist, haben wir dadurch umgekehrt die Mittel gefunden, die Schnittpunkte dieser neuen Oerter mit Geraden und — wenigstens für gewisse Lagen — unter sich durch Lineal und Zirkel zu bestimmen. Weiter wird die Discussion der gefundenen Auflösungen derselben Constructionsaufgaben einige der Haupteigenschaften derselben Curven geben.

Die Curven, auf deren Studium wir auf diesem Wege geführt sind, und die wir wegen ihrer später zu besprechenden stereometrischen Bedeutung schon gleich mit dem gewöhnlichen Gesammtnamen Kegelschnitte bezeichnen wollen, sind die Oerter der Centra von Kreisen, die durch einen gegebenen Punkt gehen und einen gegebenen Kreis berühren, während der Ort der Centra von Kreisen, die zwei gegebene Kreise berühren, aus zwei solchen Curven zusammengesetzt ist.

II. Definitionen und Fundamentaleigenschaften.

23. *Der Ort der Centra von Kreisen, die durch einen gegebenen Punkt gehen und einen gegebenen Kreis berühren, wird ein Kegelschnitt genannt. Wenn der Punkt innerhalb des Kreises liegt, wird er Ellipse genannt, wenn ausserhalb, wird er Hyperbel genannt, und wenn der gegebene Kreis eine Gerade ist,* (die wir als Kreis mit unendlich entferntem Centrum betrachten können), *wird er eine Parabel genannt.* Wenn der gegebene Punkt auf der Peripherie des gegebenen Kreises liegt, so ist der Ort eine Gerade.

24. Die Schnittpunkte eines Kegelschnittes mit einer Geraden werden mittelst 7. construirt. Weil diese Aufgabe höchstens 2 Auflösungen hat, schneidet eine Gerade einen Kegelschnitt höchstens in zwei Punkten.

1) Die Ellipse.

25. Indem wir den gegebenen Punkt F, das Centrum des gegebenen Kreises F_1, seinen Halbmesser $2a$ und einen willkürlichen Punkt der Ellipse X nennen, ist, (23)

$$FX + F_1X = 2a.$$

Die Ellipse ist also *der Ort der Punkte, deren Abstände von zwei festen Punkten eine constante Summe bilden.* Die festen Punkte werden Brennpunkte genannt, die Abstände Brennstrahlen. Der gefundene Satz zeigt, dass die zwei Brennpunkte unter sich vertauscht werden können, dass also ein Punkt X der Ellipse das Centrum ist von zwei Kreisen, die je durch einen Brennpunkt gehen und den Kreis (Leitkreis) mit Centrum im andern Brennpunkte und mit dem Halbmesser $2a$ berühren.

26. Setzen wir $FX = f$, $F_1X = f_1$, $F_1F = 2c$ und $\frac{c}{a} = \varepsilon$,

so ist $$2a = f + f_1 < 2c,$$

also $\varepsilon < 1$. Das Verhältniss ε wird die Excentricität genannt

27. Man kann beliebig viele Punkte der Ellipse bestimmen als Schnittpunkte, resp. Berührungspunkte von je zwei Kreisen (F,f) und (F_1,f_1), indem nur $f + f_1 = 2a$ ist. Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Kreise gemeinschaftliche Punkte haben sollen, ist

für $f_1 > f$ resp. $f_1 < f$

dass $f_1 - f \leqq 2c$ $f - f_1 \leqq 2c$.

also $f_1 \leqq a + c,\ f \geqq a - c$ $f_1 \geqq a - c,\ f \leqq a + c$.

28. Die Kreise (F, f) und (F_1, f_1) berühren sich in einem Punkte der Geraden $F_1 F$, wenn

$$f_1 = a + c,\ f = a - c \quad \text{oder } f_1 = a - c,\ f = a + c.$$

Die Berührungspunkte werden die Schnittpunkte der Ellipse mit der Geraden $F_1 F$ sein. Diese Punkte, die denselben Mittelpunkt O wie $F_1 F$ haben und im Abstande a von diesem Punkte, also auf den Verlängerungen der Strecke $F_1 F$ liegen, werden Scheitel genannt. Indem wir sie mit A_1, A bezeichnen, und die Gerade durch A_1, F_1, F, A die Brennpunktsachse (Hauptachse auch grofse A.) nennen, wird die Strecke $A_1 A = 2a$ die Länge der Brennpunktsachse.

29. Die Senkrechte auf $A_1 A$ in ihrem Mittelpunkte O wird die zweite Achse (Nebenachse auch kleine A.) der Ellipse genannt. Die Brennstrahlen ihrer Schnittpunkte B_1 und B mit der Ellipse haben alle vier denselben Werth a, und wenn man $OB = b$ setzt, wird

$$B_1 O = OB = b = \sqrt{a^2 - c^2} = a\ \sqrt{1 - \varepsilon^2}.$$

Die Strecke $B_1 B = 2b$ ist die Länge der zweiten Achse. Auch ihre Endpunkte B_1 und B werden Scheitel genannt.

30. Die Construction 27. der Curvenpunkte zeigt, dass alle Sehnen, die auf eine Achse senkrecht sind, von derselben halbirt werden. Hieraus folgt dann weiter, dass jede durch den Schnittpunkt O der Achsen gehende Sehne von diesem Punkte halbirt wird. O wird das Centrum der Curve genannt, eine durch O gehende Sehne ein Durchmesser.

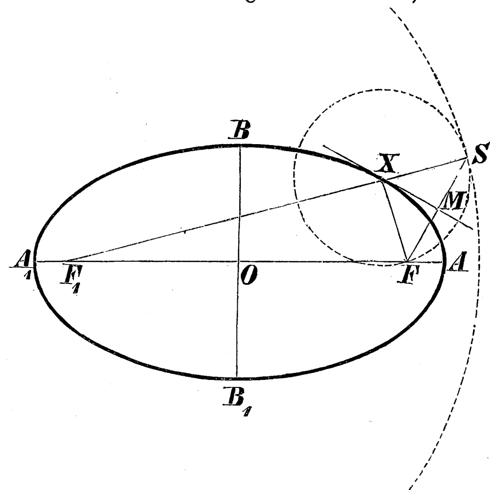


Fig. 1.

31. Weil die Brennstrahlen immer nur endliche Werthe haben (27), kann die Ellipse nicht unendliche Zweige haben. Weil sie keine Gerade in mehr als zwei Punkten schneidet (24), wird sie

dann eine geschlossene Curve sein, die überall die Convexität nach aussen wendet. Siehe Fig. 1, welche auch die schon gegebenen und im Folgenden gebrauchten Bezeichnungen enthält.

32. Ein Punkt der Ebene liegt ausserhalb, auf oder innerhalb der Ellipse, je nachdem die Summe ihrer Abstände von den Brennpunkten $\gtreqless 2a$ ist.

33. Die Länge der auf die Brennpunktsachse senkrechten Sehne in einem Brennpunkte wird der Parameter der Ellipse genannt. Wenn wir diesen durch p bezeichnen, hat man

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 + 4\,\varepsilon^2 a^2 = \left(2a - \frac{p}{2}\right)^2,$$

und also

$$\frac{p}{2} = a\,(1 - \varepsilon^2) = \frac{b^2}{a}.$$

34. Wenn S der zum Brennpunkte F in Beziehung auf eine Gerade l symmetrische Punkt ist, so wird diese Gerade die Ellipse schneiden, berühren oder ganz ausser ihr liegen, je nachdem $F_1 S \lesseqgtr 2a$. — Wenn nämlich die Gerade l durch Punkte der Ellipse geht, so werden diese Punkte Centra von Kreisen sein, die durch F und S gehen und den Kreis $(F_1, 2a)$ berühren (siehe 6. und 7.), und wenn die so bestimmten Kreise zusammenfallen, wird die Gerade l eine Tangente der Ellipse sein. — Die nachfolgenden Sätze sind unmittelbare Folgen der Eigenschaften zweier sich berührender Kreise.

35. Der Berührungspunkt einer Tangente, der eine Brennpunkt und der symmetrische Punkt des zweiten in Beziehung auf die Tangente liegen auf einer Geraden. (Gilt auch von der Hyperbel; siehe im Folgenden 49.)

36. Eine Tangente halbirt die Nachbarwinkel des von den beiden Brennstrahlen an den Berührungspunkt gebildeten Winkels.

37. Der Ort der symmetrischen Punkte eines Brennpunktes in Beziehung auf die Tangenten ist der Kreis mit Centrum im andern Brennpunkte und dem Halbmesser $2a$. — Ist in 34. enthalten. [Gilt auch von der Hyperbel, 49.]

38. Der Ort der Projectionen eines Brennpunktes auf die Tangenten ist der Kreis über der Brennpunktsachse als Durchmesser. Folgt aus 37. [Gilt auch von der Hyperbel, 49.]

39. Grenzformen der Ellipse. 1) $\varepsilon = 0$, a endlich, giebt $c = 0$, $f_1 = f = a = b = \frac{p}{2}$. Die Ellipse wird ein Kreis.

2) $\varepsilon = 1$, a endlich, giebt $c = a$, $b = p = 0$. Die Ellipse wird

eine von den Scheiteln A_1 und A, mit welchen die Brennpunkte zusammenfallen, begrenzte Doppelgerade.

3) Wenn der Brennpunkt F_1 sich ins Unendliche entfernt, während ein Punkt des Leitkreises $(F_1, 2a)$ und der andere Brennpunkt F fest bleiben, wird der genannte Leitkreis eine Gerade und die Curve also eine Parabel (23). Wenn man also diese als Grenzform einer Ellipse betrachtet, ist der Halbmesser des Leitkreises $2a$ unendlich und die Excentricität ε ist 1 geworden. Das letzte kann man z. B. daran sehen, dass der kleinste Werth $a(1-\varepsilon)$ des Brennstrahles f (siehe 27.) endlich sein muss. Indem wir diesen kleinsten Werth g nennen, leiten wir ferner aus 26., 29. und 33. ab, dass $c=\infty$, $b=\sqrt{ga(1+\varepsilon)}=\infty$, $\frac{b}{a}=0$, $\frac{p}{2}=a(1-\varepsilon)(1+\varepsilon)=2g$. Das Centrum und der Scheitel A_1 haben sich mit dem Brennpunkte F_1 ins Unendliche entfernt.

4) Man kann noch $\varepsilon=1$ haben, während b endlich bleibt und die zweite Achse B_1B fest liegt. Man hat dann $a=\infty$, $c=\infty$, und unsere Construction von Curvenpunkten wird unbrauchbar. Wegen 36. sind aber dann alle Tangenten auf B_1B senkrecht, und die Ellipse muss aus zwei Geraden bestehen, die in B_1 und B senkrecht auf B_1B sind.

5) $a=0$ giebt $b=c=p=f=f_1=0$. Die Ellipse reducirt sich dann für alle Werthe von ε auf einen Punkt.

2) Die Hyperbel.

40. Man folgert aus der Definition 23., dass *die Hyperbel der Ort der Punkte ist, deren Abstände von zwei festen Punkten eine numerisch constante Differenz bilden.* Wir bezeichnen diese durch $2a$, die festen Punkte, die man die Brennpunkte nennt, durch F und F_1, die Abstände eines Curvenpunktes X von diesen Punkten (seine Brennstrahlen) durch f und f_1. Man hat also

$$f_1 - f = \pm 2a.$$

Diese Relation zeigt, dass die Brennstrahlen unter sich vertauscht werden können; jeder Hyperbelpunkt ist also das Centrum von zwei Kreisen, die je durch den einen Brennpunkt gehen und den Kreis (Leitkreis) mit Centrum im andern Brennpunkte und mit dem Halbmesser $2a$ berühren.

41. Setzen wir $F_1F=2c$ und $\frac{c}{a}=\varepsilon$. Dann ist

$$2a = \pm(f_1 - f) < 2c,$$

also $\varepsilon > 1$. Das Verhältniss ε wird die Excentricität genannt.

42. Hyperbelpunkte werden als Schnittpunkte (resp. Berührungspunkte) bestimmt von Kreisen (F, f) und (F_1, f_1), indem $f_1 - f = \pm 2a$. Die nothwendige und hinreichende Bedingung für Schneiden oder Berührung derselben ist

$$f_1 + f \geqq 2c,$$

also, wenn $f_1 > f$ wenn $f_1 < f$

$$f_1 \geqq c + a,\ f \geqq c - a, \qquad f_1 \geqq c - a,\ f \geqq c + a.$$

43. Die Schnittpunkte A_1 und A der Hyperbel mit $F_1 F$ werden durch

$$f_1 = c + a,\ f = c - a, \text{ resp. } f_1 = c - a,\ f = c + a$$

bestimmt. Ihr Mittelpunkt O ist auch der Mittelpunkt von $F_1 F$, und der Abstand $A_1 O = OA$ ist gleich a. Die Punkte A_1 und A werden Scheitel und die Gerade $A_1 A$ die Brennpunktsachse genannt, und die Strecke $A_1 A = 2a$ ist die Länge dieser Achse.

44. Die Senkrechte auf $A_1 A$ in ihrem Mittelpunkte O wird die zweite Achse der Hyperbel genannt. Sie schneidet die Hyperbel nicht, weil $f_1 = f$ nicht möglich ist.

45. Sehnen, die auf einer Achse senkrecht stehen, werden von dieser halbirt, und Durchmesser d. i. Sehnen, die durch den Schnittpunkt der Achsen (das Centrum) gehen, werden in diesem Punkte halbirt.

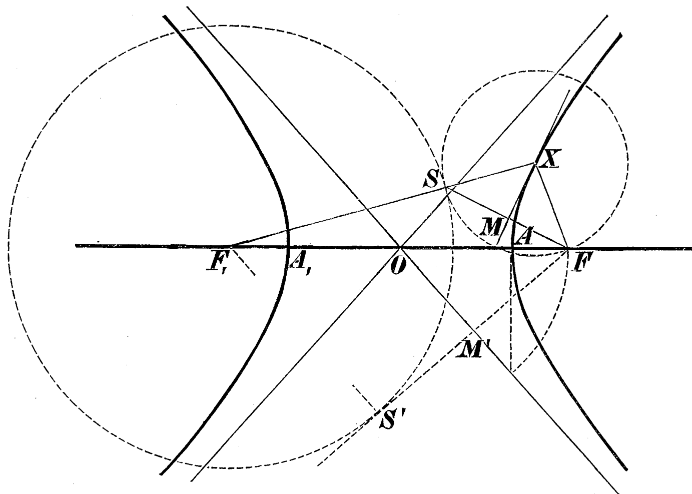


Fig. 2.

46. Aus 42. und 44. folgt, dass die Hyperbel aus zwei getrennten Zweigen besteht, die je durch einen Scheitel gehen und sich bis

ins Unendliche erstrecken. Für den einen Zweig ist $f_1 > f$, für den andern $f_1 < f$. Wegen 24. kann der Sinn der Convexität eines Zweiges sich nirgendwo ändern, und wegen 44. befindet der eine Zweig sich auf der convexen Seite des andern. Siehe Fig. 2.

47. Ein Punkt X der Ebene liegt auf derselben Seite von dem $f_1 > f$ entsprechenden Zweige wie der Brennpunkt F, wenn $F_1X - FX > 2a$; auf diesem Zweige, wenn $F_1X - FX = 2a$; zwischen den Zweigen, wenn $F_1X - FX$ numerisch kleiner als $2a$ ist; auf dem $f_1 < f$ entsprechenden Zweige, wenn $FX - F_1X = 2a$, und auf derselben Seite von diesem letzten Zweige wie F_1, wenn $FX - F_1X > 2a$.

48. Die Länge der auf der Brennpunktsachse senkrechten Sehne in einem Brennpunkte wird der Parameter der Hyperbel genannt. Wird er mit p bezeichnet, so ist $\frac{p}{2} = a(\varepsilon^2 - 1)$. (Vergl. 33.)

49. Wenn man unter Secanten und Tangenten auch solche Geraden mitrechnet, wo ein Schnittpunkt oder Berührungspunkt sich ins Unendliche entfernt hat (ein Grenzfall, der in 51 genauer besprochen wird), so wird eine Gerade l die Hyperbel schneiden oder berühren oder ganz zwischen ihren Zweigen liegen, je nachdem $F_1S \gtreqless 2a$ ist, wo S der symmetrische Punkt des Brennpunktes F ist in Beziehung auf die Gerade l. Dieser Satz wird ganz wie 34. aus 6. und 7. hergeleitet, und aus diesen Sätzen folgert man weiter, dass die Sätze 35., 37., 38. auch für die Hyperbel gültig sind. Statt 36. erhält man für die Hyperbel:

50. Eine Tangente halbirt den von den Brennstrahlen an den Berührungspunkt gebildeten Winkel.

51. Die Schnittpunkte einer Geraden l mit der Hyperbel wurden als Centra bestimmt von Kreisen, die durch F und seinen symmetrischen Punkt S in Beziehung auf l gehen und den Kreis $(F_1, 2a)$ berühren. Wenn die Gerade FM diesen Kreis berührt, so wird der eine Schnittpunkt sich bis ins Unendliche entfernen (6). Also: Die zwei Reihen von parallelen Geraden, deren spitze Winkel θ mit der Brennpunktsachse durch $\cos\theta = \frac{a}{c} = \frac{1}{\varepsilon}$ bestimmt sind, haben nur einen wirklichen Schnittpunkt mit der Hyperbel, indem der andere sich bis ins Unendliche entfernt hat.

52. Wenn FS den Kreis $(F, 2a)$ im symmetrischen Punkte S berührt, in welchem Falle die Gerade l durch das Centrum geht, so sind die beiden Schnittpunkte unendlich entfernt. Also: Die

zwei Geraden durch das Centrum, die den — wie in 51 bestimmten — Winkel ϑ mit der Brennpunktsachse bilden, enthalten nur unendlich entfernte Punkte von der Hyperbel. Diese Geraden werden Asymptoten genannt. Weil der symmetrische Punkt auf der Kreisperipherie $(F_1, 2a)$ liegt, ist eine Asymptote als eine Tangente der Hyperbel mit unendlich entferntem Berührungspunkte zu betrachten. Man sieht durch Bewegung von S auf dem Kreise $(F_1, 2a)$, dass eine Asymptote die Tangenten, welche die beiden Zweige der Hyperbel berühren, trennt. (Die Fig. 2 zeigt sowohl die Bestimmung der Asymptote OM' durch den symmetrischen Punkt S', als auch ihre bequemere Construction mittelst $\cos\vartheta = \frac{a}{c}$).

53. Eine Gerade, deren spitzer Winkel mit der Brennpunktsachse v ist, wird, wenn $v > \vartheta$, entweder einen der Zweige schneiden oder berühren, oder zwischen den Zweigen liegen, und wenn $v < \vartheta$ ist, die beiden Zweige schneiden. — Dies folgt aus der Construction 6. (49), indem man sich erinnert, dass ein Schnittpunkt X auf dem einen oder andern Zweige liegt, je nachdem er Centrum eines berührenden Kreises ist, der ganz ausserhalb des Kreises $(F_1, 2a)$ liegt, oder eines, der diesen Kreis umschliesst.

54. Grenzformen der Hyperbel: 1) $\varepsilon = 1$, a endlich, giebt $c = a$, $p = 0$, $\vartheta = 0$. Die Zweige der Hyperbel werden die doppelt genommenen Verlängerungen der Brennpunktsachse über die Scheitel hinaus, mit welchen die Brennpunkte zusammenfallen. (Uebergangsfall zur Ellipse; vergl. 39, 2.)

2) Wenn der Brennpunkt F_1 sich bis ins Unendliche entfernt, während ein Punkt des Leitkreises $(F_1, 2a)$ und der Brennpunkt F fest bleiben, so wird die Curve eine Parabel. (Vergl. 39, 3.) Diese kann also auch als eine Grenzform der Hyperbel betrachtet werden, wo $a = \infty$, $\varepsilon = 1$, $c = \infty$, $\vartheta = 0$, und wo ein Scheitel und ein Brennpunkt, und mit ihnen sowohl der eine Zweig als auch das Centrum und die Asymptoten sich bis ins Unendliche entfernt haben und also verschwunden sind. (Uebergangsfall zur Ellipse; vergl. 39, 3.)

3) $\varepsilon = \infty$, a endlich, giebt $c = \infty$. Die Brennpunkte sind also unendlich entfernt. Die Constructionskreise (F_1, f_1) und (F, f) (siehe 42.) werden also auf der Brennpunktsachse senkrechte Gerade. Entweder sind sie also parallel und bestimmen gar keinen Punkt, oder sie fallen ganz zusammen. Das letzte wird nur mit denjenigen der Fall sein, die durch die Scheitel A_1 und A gehen. Die Hyperbel wird also aus zwei Geraden bestehen, die in A_1 und A auf der

Geraden $A_1 A$ senkrecht sind. Stimmt mit 49. und 50. überein. (Uebergangsfall zur Ellipse, indem dann die Brennpunktsachse der Hyperbel mit der zweiten Achse der Ellipse vertauscht wird; vergl. 39, 4.)

4) $a = 0$, $\varepsilon < \infty$, giebt $c = 0$, $p = 0$. Die Scheitel fallen im Centrum zusammen. Eine Gerade durch diesen Punkt schneidet also die Grenzform in zwei zusammenfallenden Punkten, und kann sie nicht mehrmals schneiden (24). Die Hyperbel muss also aus zwei Geraden bestehen, die beide mit der Brennpunktsachse den durch $\cos\theta = \frac{1}{\varepsilon}$ bestimmten spitzen Winkel θ bilden. — Stimmt mit 50. und 51. überein.

5) $a = 0$, $\varepsilon = \infty$ ist zugleich ein Grenzfall von den beiden vorhergehenden Fällen. Die Hyperbel ist eine mit der zweiten Achse zusammenfallende Doppelgerade; die Brennpunkte sind unbestimmt, weil $c = 0 . \infty$.

3) Die Parabel.

55. Man könnte die Eigenschaften der Parabel mittelst 39, 3. und 54, 2. aus denjenigen der Ellipse oder der Hyperbel herleiten; man kann sie aber auch direct aus der Definition der Parabel (23) deduciren. Diese Definition kann durch die folgende ersetzt werden: *Die Parabel ist der Ort der Punkte, welche denselben Abstand von einem festen Punkte und einer festen Geraden haben.* Der feste Punkt, den wir durch F bezeichnen wollen, wird der Brennpunkt genannt, der Abstand $FX = f$ von einem Curvenpunkte X wird der Brennstrahl des Punktes, und die feste Gerade die Leitlinie genannt. Wir werden die Projection des Brennpunktes F auf die Leitlinie D nennen und $DF = d$ setzen.

56. Punkte der Parabel können bestimmt werden als Schnittpunkte resp. Berührungspunkte von Kreisen (F, f) und Geraden, die mit der Leitlinie im Abstande f parallel sind. Die Bedingungen des Schneidens, resp. der Berührung, sind, dass die Geraden sich auf derselben Seite von der Leitlinie wie der Brennpunkt befinden, und dass $f > d$, resp. $= d$.

57. Die auf der Leitlinie senkrechte Gerade FD wird die Achse der Parabel genannt; sie schneidet nur die Parabel im Mittelpunkte A zwischen F und D (also $DA = AF = \frac{d}{2}$). Der Punkt A wird der Scheitel der Parabel genannt.

58. Sehnen, die auf der Achse senkrecht sind, werden von dieser halbirt.

59. Die Parabel besteht aus einem einzigen Zweige, der sich bis ins Unendliche auf beiden Seiten der Achse erstreckt (56). Die Convexität ist überall gegen die Leitlinie gerichtet. (Siehe 24. und 46.)

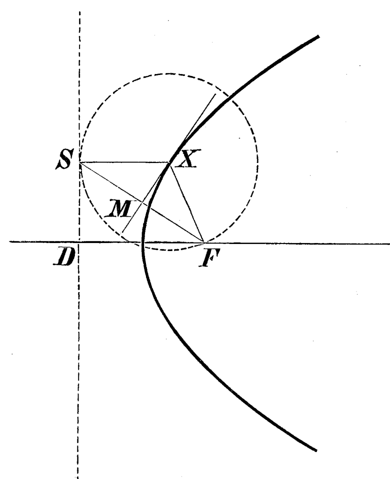


Fig. 3.

60. Ein Punkt X liegt auf derselben Seite von der Parabel wie die Leitlinie, auf der Parabel selbst, oder auf derselben Seite wie der Brennpunkt, je nachdem sein Abstand von der Leitlinie $\lesseqgtr FX$ ist.

61. Die Länge der auf der Achse senkrechten Sehne im Brennpunkte wird der Parameter der Parabel genannt. Bezeichnen wir ihn mit p, so hat man $p = 2d$ (55).

62. Je nachdem der symmetrische Punkt S des Brennpunktes in Beziehung auf eine Gerade l auf derselben Seite der Leitlinie wie der Brennpunkt, auf der Leitlinie selbst oder auf der entgegengesetzten Seite liegt, wird die Gerade l die Parabel schneiden oder berühren oder ganz ausser ihr liegen. Doch wird der eine Schnittpunkt sich ins Unendliche entfernen, wenn die Gerade mit der Achse parallel ist (7).

63. Die Gerade, die den Berührungspunkt einer Tangente mit dem symmetrischen Punkte des Brennpunktes in Beziehung auf diese Tangente verbindet, ist der Achse parallel.

64. Eine Tangente bildet gleiche Winkel mit dem an den Berührungspunkt gezogenen Brennstrahle und mit der Achse. Ihr Schnittpunkt mit der Achse hat also denselben Abstand vom Brennpunkte, wie der Berührungspunkt.

65. Die Leitlinie ist der Ort der symmetrischen Punkte der Brennpunkte in Beziehung auf die Tangenten (62).

66. Die Tangente im Scheitel, die senkrecht auf der Achse steht (64), ist der Ort der Projectionen des Brennpunktes auf die Tangenten (65).

67. Grenzformen der Parabel. 1) $d = 0$. Der Brennpunkt und der Scheitel fallen zusammen auf die Leitlinie. Die

Parabel wird eine Doppellinie, die mit einer der beiden vom Scheitel begrenzten unendlichen Strecken der Achse zusammenfällt.

2) Der Brennpunkt sowohl als die Leitlinie haben sich in entgegengesetztem Sinne ins Unendliche entfernt. Die Parabel wird dann mit der Scheiteltangente zusammen fallen.

Uebungsaufgaben.

1) Von zwei festen Punkten der Potenzlinie eines Kreisbüschels werden Tangenten an einen beweglichen Kreis des Büschels gezogen. Den Ort der Schnittpunkte dieser Tangenten zu finden.

2) An einen beweglichen Kreis eines Kreisbüschels werden Tangenten gezogen, sowohl von einem festen Punkte der Potenzlinie, als auch parallel mit der Potenzlinie. Den Ort der Schnittpunkte dieser Tangenten zu finden.

3) Die Schnittpunkte eines Kegelschnittes mit einer durch einen Brennpunkt gehenden Geraden zu construiren; zu zeigen, dass das Schneiden immer statt hat.

4) Die Schnittpunkte einer Ellipse und einer Hyperbel mit gemeinschaftlichen gegebenen Brennpunkten und mit gegebenen Längen der Brennpunktsachsen zu construiren.

III. Tangenten.

68. Die Construction einer Tangente mit gegebenem Berührungspunkte wird für die Ellipse mittelst 36., für die Hyperbel mittelst 50. und für die Parabel mittelst 64. ausgeführt.

69. Um eine Tangente von einem gegebenen Punkte P an einen Kegelschnitt zu legen, sucht man entweder den symmetrischen Punkt S eines Brennpunktes F in Beziehung auf die gesuchte Tangente, oder die Projection M von F auf diese Tangente zu bestimmen. Geometrische Oerter dieser Punkte sind gefunden in 37. und 38. für die Ellipse und die Hyperbel und in 65. und 66. für die Parabel. Im jetzigen Falle wird der Kreis durch F mit Centrum in P noch ein anderer Ort des symmetrischen Punktes S, und der Kreis über FP als Durchmesser ein anderer Ort der Projection M sein. S und M lassen sich also bestimmen und geben dann die gesuchte Tangente. Ihr Berührungspunkt wird nachher durch 35. oder 63. bestimmt. Die Anzahl der Auflösungen wird 2, 1 oder 0 sein, für die Ellipse, je nachdem $F_1P + FP \gtreqless 2a$,

für die Hyperbel, je nachdem die positive Differenz $\pm(F_1P - FP) \lesseqgtr 2a$, und für die Parabel, je nachdem der Abstand des Punktes P von der Leitlinie $\lesseqgtr FP$. Diese Discussion enthält neue Beweise dafür, dass die Convexität so gerichtet ist, wie wir früher angegeben haben. — Man wird noch bemerken, dass die bekannte Construction der Tangenten von einem Punkte an einen Kreis als Specialfall in derjenigen der hier gegebenen Constructionen, wo man die Projection M bestimmt, enthalten ist.

70. Die Construction einer Tangente mit gegebener Richtung wird auch mittelst der in 69. citirten Sätze ausgeführt. Für die Ellipse bekommt man dann immer 2 Auflösungen, für die Parabel 1, und für die Hyperbel 2 oder 0, je nachdem eine Gerade durch das Centrum mit der gegebenen Richtung in denselben von den Asymptoten gebildeten Scheitelwinkeln wie die zweite Achse, oder in denselben wie die Brennpunktsachse liegt. Die Richtung einer Asymptote hat keine andere Tangente, als die Asymptote selbst. (Vgl. 52. und 53.).

71. Das Product der Abstände der Brennpunkte einer Ellipse oder Hyperbel von einer Tangente hat den constanten Werth $a^2 - c^2 = a^2(1 - \varepsilon^2)$. — Wird durch 38. bewiesen. Für die Ellipse ist das Product dem Quadrat b^2 der zweiten Halbachse gleich.

72. Der Ort des Schnittpunktes P einer beweglichen Tangente einer Ellipse oder Hyperbel mit einer Geraden durch einen Brennpunkt F, die einen, auch in Beziehung auf den Umlaufssinn, gegebenen Winkel v mit der Tangente bildet, ist ein Kreis, dessen Centrum auf der zweiten Achse liegt; wenn dieser Kreis überhaupt durch Punkte der gegebenen Curve geht, wird er sie berühren.

Der erste Theil dieses Satzes kann aus seinem schon bekannten Specialfalle 38. folgendermassen abgeleitet werden: Wenn M die Projection des Brennpunktes F auf die bewegliche Tangente und O das Centrum ist, bestimmt man auf der zweiten Achse den Punkt G so, dass $\sphericalangle\, OGF = \sphericalangle\, MPF = v$ (auch in Beziehung auf den Umlaufsinn) ist. Dann wird

$$\triangle\, OFG \sim \triangle\, MFP, \text{ also } \triangle\, PFG \sim \triangle\, MFO$$

und folglich

$$GP : OM = GF : OF.$$

Die drei letzten Glieder dieser Proportion bleiben constant (38); GP bleibt also auch constant, oder P durchläuft eine Kreisperipherie mit dem Centrum O.

Den letzten Theil des Satzes konnte man daraus folgern, dass der auf einer beweglichen Tangente liegende Punkt P immer auf der convexen Seite der Curve bleiben muss. Man kann ihn auch so beweisen: Wenn der besprochene Punkt P der Berührungspunkt der Tangente ist, so hat man mittelst 36. und 50., indem F_1 der andere Brennpunkt ist, $\sphericalangle FPF_1 = 180^0 - \sphericalangle F_1GF$ (für die Ellipse) oder $\sphericalangle FPF_1 = \sphericalangle FGF_1$ (für die Hyperbel), woraus folgt, dass man dem Viereck F_1PFG einen Kreis umschreiben kann. Mittelst dieses Kreises sieht man weiter, dass die Gerade PG für die Ellipse den Winkel der Brennstrahlen und für die Hyperbel die Nachbarwinkel dieses Winkels halbirt. Also ist sie senkrecht auf der Tangente des Kegelschnittes, die dann auch Tangente des gefundenen Kreises wird.

Wenn die Curve eine Hyperbel ist, wird sie immer vom gefundenen Orte in zwei Punkten berührt; wenn sie eine Ellipse ist, hat dasselbe nur statt für $\sin v > \frac{b}{a}$, und für $\sin v = \frac{b}{a}$ fallen die beiden Berührungspunkte zusammen in einen Endpunkt der zweiten Achse. — Man sieht dies durch Betrachtung der Variation des von einer Tangente und dem Brennstrahle an den Berührungspunkt gebildeten Winkels, indem der Berührungspunkt die Hyperbel resp. Ellipse durchläuft.

73. Zwei Tangenten einer Ellipse oder einer Hyperbel bilden in entgegengesetztem Umlaufsinne denselben Winkel mit den Geraden, die ihren Schnittpunkt mit den beiden Brennpunkten verbinden. — Dieser Satz folgt aus 72., indem der gefundene Kreis, welcher dem Brennpunkte F und dem Winkel v entspricht, mit demjenigen zusammenfällt, der auf dieselbe Weise dem Brennpunkte F_1 und dem Winkel $\div v$ (das ist v in dem entgegengesetzten Umlaufsinne) entspricht.

Der Satz konnte auch so ausgedrückt werden: Die von zwei Tangenten einer Ellipse oder Hyperbel gebildeten Winkel haben dieselben Halbirungslinien, wie die von den Verbindungslinien des Schnittpunktes der Tangenten mit den Brennpunkten gebildeten Winkel.

74. Wenn der Scheitel eines Winkels v von constanter Grösse sich auf einer Kreisperipherie bewegt, während der eine Schenkel durch einen festen Punkt F geht, so wird der andere Schenkel stets eine feste Ellipse oder Hyperbel mit einem Brennpunkte in F berühren. (Diese Curve ist der O r t des Schenkels; siehe 1.)

Man beweist diesen Satz dadurch, dass man mittelst 72. bestimmt, wie die Achsen und der andere Brennpunkt dieses Kegel-

schnittes liegen müssen, und wie gross seine Brennpunktsachse sein muss, wenn der Satz richtig ist, und nachher durch Anwendung von 72. auf den gefundenen Kegelschnitt zeigt, dass er wirklich richtig ist. Im Folgenden muss man sich öfters Beweise für Umkehrsätze auf diese Weise geführt denken. (Vergl. 10.)

75. Der Ort des Schnittpunktes P einer beweglichen Tangente einer Parabel und einer Geraden durch den Brennpunkt F, die einen auch in Bezug auf den Umlaufsinn gegebenen Winkel v bilden, ist eine feste Tangente der Curve. — Beweis: Wenn A der Scheitel der Parabel ist, und M der Schnittpunkt der Scheiteltangente mit der beweglichen Tangente, dann bestimmt man auf der Scheiteltangente einen Punkt G so, dass $\sphericalangle AGF = \sphericalangle MPF$ ist. Dann wird (66)

$$\triangle AFG \sim \triangle MFP, \text{ also } \triangle AFM \sim \triangle GFP.$$

GP wird also senkrecht auf FG sein und darum eine feste Tangente. (Der bewiesene Satz ist in 72. einbegriffen, wenn man die Parabel als Grenzform der Ellipse oder Hyperbel betrachtet.)

76. Der Kreis durch die Schnittpunkte dreier Tangenten einer Parabel geht durch den Brennpunkt der Parabel. — Dieser Satz folgt aus 75., wo der gefundene Ort durch passende Wahl des Winkels v eine ganz willkürliche Tangente der Parabel werden kann.

77. Wenn zwei Tangenten einer Parabel drei andere in Q und R, Q_1 und R_1, Q_2 und R_2 treffen, so ist

$$QQ_1 : QQ_2 = RR_1 : RR_2.$$

Ist nämlich F der Brennpunkt der Parabel, so werden (76) die Punkte Q und R, Q_1 und R_1, Q_2 und R_2 mittelst dreier Kreise des durch F und den Schnittpunkt P der zwei ersten Tangenten gehenden Kreisbüschels bestimmt. $\frac{QQ_1}{QQ_2}$ sowohl als $\frac{RR_1}{RR_2}$ ist dann dem Verhältnisse der Centralabstände der entsprechenden Kreise gleich. — Man kann auch leicht den Satz unmittelbar aus 75. herleiten.

78. Die von zwei Tangenten einer Parabel gebildeten Winkel haben dieselben Halbirungslinien wie die Winkel, welche gebildet werden von der mit der Achse parallelen Geraden durch den Schnittpunkt der Tangenten und der Verbindungsgeraden dieses Punktes mit dem Brennpunkte. Folgt aus 75. (in 73. einbegriffen).

79. Wenn der Scheitel eines Winkels von constanter Grösse eine Gerade durchläuft, während der eine Schenkel durch einen

festen Punkt F geht, so wird der Ort des anderen Schenkels eine Parabel mit dem Brennpunkte F sein. (In 74 einbegriffen.)

80. Die von einem Brennpunkte F eines Kegelschnittes an den Schnittpunkt P zweier Tangenten gezogene Gerade halbirt einen der Winkel der vom selben Brennpunkte an die Berührungspunkte X und Y der Tangenten gezogenen Brennstrahlen.

Für die Ellipse und die Hyperbel wird dieser Satz, wenn wir die symmetrischen Punkte des anderen Brennpunktes F_1 in Beziehung auf die zwei Tangenten S_1 und T_1 nennen, daraus folgen, dass $\triangle FPS_1 \cong FPT_1$ ist (37). Um ihn auch für die Parabel zu beweisen, betrachten wir dagegen die symmetrischen Punkte S und T des Brennpunktes F, welche auf der Leitlinie liegen (65). Man findet dann $\sphericalangle XFP = \sphericalangle PSX$ und $\sphericalangle PFY = \sphericalangle YTP$; weiter ist $\sphericalangle PSX = \sphericalangle YTP$, weil $PS = PF = PT$, und weil SX und TY auf der Leitlinie senkrecht sind (63).

81. Wenn die Gerade, welche die Berührungspunkte zweier Tangenten eines Kegelschnittes verbindet, durch einen Brennpunkt geht, muss sie senkrecht sein auf der Geraden, welche den Brennpunkt mit dem Schnittpunkte der Tangenten verbindet (80). [Vergl. im Folgenden 120.]

82. Die Geraden, welche einen Brennpunkt mit den Schnittpunkten einer beweglichen Tangente mit zwei festen Tangenten verbinden, bilden einen Winkel von constanter Grösse. — Wegen 80 ist nämlich der Winkel die Hälfte des von den Brennstrahlen an die Berührungspunkte der festen Tangenten gebildeten Winkels.

Wenn umgekehrt ein Winkel von constanter Grösse sich um seinen Scheitel F dreht, so wird der Ort der Geraden, welche die Schnittpunkte der Scheitel mit zwei festen Geraden mit einander verbindet, ein Kegelschnitt sein, der diese Geraden berührt und einen Brennpunkt im festen Scheitel F hat.

Um hier die in 74. besprochene Beweisführung zu brauchen, bestimmt man erstens den Berührungspunkt der einen festen Tangente, der gleich eine Gerade durch den anderen Brennpunkt F_1 giebt, dann mittelst 73. noch eine Gerade durch F_1. Man wird dann einen völlig bestimmten Kegelschnitt haben (eine Parabel, wenn die F_1 bestimmenden Geraden parallel sind), der alle die gegebenen Eigenschaften hat.

83. Die vier Brennstrahlen an zwei Punkte eines Kegelschnittes (für die Parabel die beiden Brennstrahlen und die beiden mit der Achse parallelen Geraden durch die zwei Curvenpunkte) berühren einen Kreis. — Der Schnittpunkt der Tangenten in den

zwei Punkten hat nämlich, wegen 79. und 36. und der analogen Sätze, denselben Abstand von den vier Brennstrahlen. (Man konnte auch den Satz unmittelbar aus den Definitionen der drei Kegelschnitte herleiten.)

84. Wenn Q und R die Punkte sind, wo eine bewegliche Tangente einer Hyperbel (mit dem Centrum O) die Asymptoten schneidet, so hat das Dreieck QOR eine constante Fläche ($= \frac{1}{2} c^2 \sin 2\theta$, wenn — wie im Vorhergehenden — $2c$ der Abstand F_1F der Brennpunkte ist und θ der spitze Winkel, welchen eine Asymptote mit der Brennpunktsachse bildet). — Indem die Asymptoten Tangenten mit unendlich entfernten Berührungspunkten sind (52), ist nämlich (82) von den einander entgegengesetzten Winkeln QF_1R und RFQ des Vierecks QF_1RF der eine $\frac{1}{2} \cdot 2\theta$, der andere $\frac{1}{2}(360^0 - 2\theta)$. Sie sind also Supplementwinkel, und dem Viereck kann ein Kreis umgeschrieben werden. Wenn dieser die Asymptote OQ noch im Punkte T schneidet, so hat man

$$OQ \cdot OR = OQ \cdot OT = OF \cdot OF_1 = -c^2,$$

wo jedoch das Vorzeichen gleichgültig ist, weil die Strecken OQ und OR sich auf nicht parallelen Geraden befinden. (Derselbe Satz wird später anders bewiesen.)

85. Die auf eine Tangente in ihrem Berührungspunkte mit einer Curve senkrechte Gerade wird die Normale der Curve in diesem Punkte genannt; der Punkt heisst Fusspunkt der Normale. Eine Normale einer Ellipse halbirt den Winkel der Brennstrahlen an den Fusspunkt (36); eine Normale einer Hyperbel halbirt die Nachbarwinkel des von den Brennstrahlen gebildeten Winkels (50), und eine Normale einer Parabel bildet gleiche Winkel mit dem Brennstrahle und der Achse (64).

86. Aufgabe: Durch einen gegebenen Punkt N der Brennpunktsachse einer Ellipse oder Hyperbel eine (von der Achse verschiedene) Normale zu ziehen. **Auflösung:** N und der Schnittpunkt T der Tangente im Fusspunkte der gesuchten Normale mit derselben Achse sind harmonisch verbunden in Beziehung auf die Brennpunkte F und F_1. T ist also bestimmt und die Aufgabe auf 69. zurückgeführt. (Möglichkeitsbedingungen anzugeben.)

87. Aufgabe: Durch einen gegebenen Punkt G der zweiten Achse einer Ellipse oder Hyperbel eine (von der Achse verschiedene) Normale an die Curve zu ziehen. Wird mittelst 72. gelöst. (Möglichkeitsbedingungen anzugeben.)

88. Das Product $XN \cdot XG$ der Strecken einer Normale an eine Ellipse oder Hyperbel, welche der Fusspunkt X und die

Schnittpunkte N und G mit den Achsen begrenzen, ist dem Producte der Brennstrahlen an den Fusspunkt gleich. — Die Punkte F, F_1, X und G liegen nämlich auf einer Kreisperipherie (siehe den Beweis von 72.), woraus folgt, dass $\triangle FXN \sim \triangle GXF_1$.

Ist v der Winkel, welchen die Tangente in X mit den Brennstrahlen bildet, so hat man wegen 72., dass $XG = \frac{a}{\sin v}$, und dann sieht man, dass $XN = \frac{f \cdot f_1}{a} \sin v$ ist, indem f und f_1 die Brennstrahlen an X sind. Aus 71. erhält man weiter: $XN = \pm \frac{a^2 - c^2}{a \sin v}$, wo man, um die Strecke XN positiv zu erhalten, für die Ellipse $+$ und für die Hyperbel $\div$ lesen muss.

89. Aufgabe: Von einem Punkte N der Achse eine (von der Achse verschiedene) Normale an eine Parabel zu ziehen. **Auflösung:** Der Brennpunkt F ist der Mittelpunkt von N und dem Schnittpunkte der Tangente im Fusspunkte der gesuchten Normale mit der Achse (64). Ein anderes Auflösungsmittel erhält man durch 90. (Möglichkeitsbedingungen.)

90. Wenn T und N die Schnittpunkte der Tangente und Normale in einem Punkte X einer Parabel mit der Achse bezeichnen, und U die Projection des Punktes X auf die Achse ist, so wird der Scheitel A der Parabel der Mittelpunkt von T und U sein; UN aber wird dem halben Parameter gleich sein (66 und 61).

91. Aufgaben: Zwei Kegelschnitte mit einem gemeinschaftlichen Brennpunkte seien gegeben (dadurch dass ausser diesem Brennpunkte auch der andere Brennpunkt und die Länge der Brennpunktsachse — oder, wenn die Curve eine Parabel ist, die Leitlinie — gegeben sind), zu finden: 1) die Schnittpunkte der Kegelschnitte, 2) ihre gemeinschaftlichen Tangenten. — Die erste dieser Aufgaben kann auf 18., resp. 21., zurückgeführt werden, und giebt bis vier Auflösungen; die zweite lässt sich mittelst 37., resp. 65., lösen und hat bis zwei Auflösungen; wenn beide Curven Parabeln sind, hat sie eine Auflösung.

92. Zwei Kegelschnitte mit einem gemeinschaftlichen Brennpunkte werden sich berühren, wenn der Abstand der nicht gemeinschaftlichen Brennpunkte von einander der Summe oder der Differenz der Längen der Brennpunktsachsen gleich ist; ist der eine Kegelschnitt eine Parabel, so muss der Abstand ihrer Leitlinie vom nichtgemeinschaftlichen Brennpunkte des anderen der Brennpunktsachse dieses letzten Kegelschnittes gleich sein; zwei Parabeln mit gemeinschaftlichem Brennpunkte können sich nicht berühren. — Diese

Resultate werden gefunden als Bedingungen für zusammenfallende Auflösungen der einen oder der anderen der Aufgaben 91.

Uebungsaufgaben.

In den folgenden Aufgaben setzen wir voraus, dass die Ellipsen und Hyperbeln durch ihre Brennpunkte und die Länge ihrer Brennpunktsachsen gegeben sind, die Parabeln durch ihre Brennpunkte und Leitlinien.

1) An einen Kegelschnitt eine Tangente zu legen mit gegebenem Abstande von einem Brennpunkte.

2) An einen Kegelschnitt eine Tangente zu legen, die einen gegebenen Winkel mit den Brennstrahlen an den Berührungspunkt bildet.

3) Eine gemeinschaftliche Tangente zu legen an eine Parabel und einen Kreis mit Centrum auf der Achse der Parabel.

4) Eine gemeinschaftliche Tangente an zwei Parabeln mit parallelen Achsen zu legen.

5) Eine gemeinschaftliche Tangente zu legen an eine Ellipse oder Hyperbel und einen damit concentrischen Kreis.

6) Eine gemeinschaftliche Tangente an zwei concentrische Kegelschnitte zu legen.

7) Die Schnittpunkte einer Ellipse oder Hyperbel mit einem Kreise durch die Brennpunkte zu construiren.

8) Zu beweisen, dass die auf den Tangenten in den Endpunkten der Brennpunktsachse einer Ellipse oder Hyperbel durch eine bewegliche Tangente abgeschnittenen Strecken, von den Berührungspunkten der Tangenten an gerechnet, ein constantes Product haben.

9) An einen Kegelschnitt eine Normale zu legen, auf welcher der Fusspunkt und der Schnittpunkt mit einer Achse eine gegebene Strecke begrenzen. Möglichkeitsbedingungen. (Die Aufgabe bedarf, wenn die Curve eine Ellipse oder Hyperbel ist, besonderer Auflösungen, je nachdem die Achse die eine oder andere Achse ist, und noch einer besondern Lösung, wenn sie eine Parabel ist.)

10) An eine Ellipse oder Hyperbel eine Normale zu ziehen, auf welcher die Schnittpunkte mit den Achsen eine gegebene Strecke begrenzen.

IV. Construction von Kegelschnitten aus gegebenen Bedingungen[1]; confocale Kegelschnitte.

93. Ein Kegelschnitt ist durch seine Brennpunkte und die Länge der Brennpunktsachse völlig bestimmt. Je nachdem diese grösser oder kleiner ist als der Abstand der Brennpunkte von einander, wird die Curve eine Ellipse oder Hyperbel sein. — Eine Parabel ist völlig bestimmt durch ihren Brennpunkt und ihre Leitlinie. Im Folgenden beabsichtigen wir namentlich diese bestimmenden Stücke durch Construction zu finden, und Sätze herzuleiten über ihre geometrischen Oerter u. s. w., die für solche Constructionen nützlich sein können.

94. Aufgabe: Durch einen gegebenen Punkt einen Kegelschnitt mit gegebenen Brennpunkten zu legen. — Der gesuchte Kegelschnitt wird entweder eine Ellipse sein, deren Brennpunktsachse gleich der Summe, oder eine Hyperbel, deren Brennpunktsachse gleich der Differenz der Brennstrahlen an den gegebenen Punkt ist. Diese zwei Curven werden sich noch in drei anderen Punkten, die mit dem ersten in Beziehung auf die Achsen und das Centrum symmetrisch liegen, schneiden, und ihre Tangenten in jedem Schnittpunkte sind senkrecht auf einander (36. und 50.). — Wenn der gegebene Punkt sich ins Unendliche entfernt, wird auch die Ellipse sich ins Unendliche entfernen, also verschwinden; die Hyperbel aber, die dann nur eine gegebene Richtung einer Asymptote bekommt, wird bestimmt durch 51.

Kegelschnitte mit denselben zwei Brennpunkten werden confocal genannt. Diese Reihe von Curven enthält sowohl Ellipsen als Hyperbeln, und durch jeden Punkt der Ebene gehen eine Ellipse und eine Hyperbel der Reihe. Weder die Ellipsen noch die Hyperbeln schneiden sich, sondern jede Ellipse schneidet jede Hyperbel unter rechten Winkeln.

---

1) Von solchen Aufgaben werden manche erst in den folgenden Abschnitten sich darbieten und gelöst werden können; es ist aber nützlich schon hier solche mitzunehmen, wozu die gefundenen Sätze hinreichen. — Wir bemerken, dass, wenn wir von einem unbekannten Kegelschnitte sprechen, wir immer voraussetzen können, dass er eine Ellipse oder Hyperbel sei, und dass ihm also zwei Brennpunkte und Centrum zukommen; der Grenzfall, wo er eine Parabel ist, wird sich nämlich dann, wenn er statthat, von selbst dadurch darbieten, dass ein Brennpunkt und das Centrum sich ins Unendliche entfernen.

95. Die Construction eines Kegelschnittes mit gegebenen Brennpunkten, der eine Gerade berührt, wird mittelst 35. ausgeführt und giebt eine Auflösung. In einer Reihe von confocalen Kegelschnitten giebt es also einen einzigen, der eine gegebene Gerade berührt, und confocale Kegelschnitte haben niemals gemeinschaftliche Tangenten.

96. Die Construction eines Kegelschnittes mit gegebenen Brennpunkten und mit einer gegebenen Normale wird auf 95. zurückgeführt, indem diese Normale im gesuchten Fusspunkte einen andern Kegelschnitt mit denselben Brennpunkten berührt.

97. Parabeln werden confocal genannt, wenn sie denselben Brennpunkt und dieselbe Achse haben. Indem man auch für Parabeln die Aufgaben 94—96 löst, findet man, dass eine Reihe von confocalen Parabeln sich in zwei solche Halbreihen theilt, dass durch jeden Punkt der Ebene eine Parabel jeder Halbreihe geht, dass Parabeln derselben Halbreihe sich niemals schneiden, dagegen Parabeln verschiedener Halbreihen einander in zwei Punkten unter rechten Winkeln schneiden, und dass jede Gerade der Ebene eine einzige Parabel der ganzen Reihe berührt und einer andern im selben Punkte normal ist.

98. Die Winkel der Tangenten von einem festen Punkte P an eine Reihe von confocalen Kegelschnitten haben dieselben Halbirungslinien (73. und 78.). Diese berühren die zwei durch P gehenden Kegelschnitte der Reihe.

99. Der Ort der Schnittpunkte von auf einander senkrechten Tangenten an zwei confocale Kegelschnitte mit Centrum (das sind Ellipsen und Hyperbeln) ist ein Kreis mit demselben Centrum. — Um dieses zu beweisen bezeichnen wir durch $2c$ den Abstand der gemeinschaftlichen Brennpunkte von einander, durch $2a$ und $2a'$ die Längen der zwei Brennpunktsachsen, durch P einen willkürlichen Punkt des Ortes, durch O das Centrum der Kegelschnitte und durch M und M_1 die Schnittpunkte der einen Tangente mit dem Kreise (O, a). Indem wir noch $OP = x$ setzen, wird die Potenz von P in Beziehung auf (O, a)

$$x^2 - a^2 = PM \cdot PM_1 = a'^2 - c^2$$

(wegen 71.), und also ist $x = \sqrt{a^2 + a'^2 - c^2}$ constant. Um überhaupt senkrecht auf einander stehende Tangenten zu bekommen, muss man nur $a^2 + a'^2 > c^2$ haben. Diese Möglichkeitsbedingung ist jedenfalls erfüllt, wenn eine der Curven eine Ellipse ist.

100. Der Ort der Schnittpunkte von auf einander senkrechten

Tangenten einer Ellipse oder Hyperbel ist ein mit dem Kegelschnitte concentrischer Kreis mit dem Radius $\sqrt{2a^2 - c^2}$ (99). Eine Hyperbel hat nur auf einander senkrechte Tangenten, wenn $2a^2 \geq c^2$, welche Bedingung auch so ausgedrückt werden kann, dass derjenige Winkel 2θ der Asymptoten, welcher die Brennpunktsachse enthält, $\leq 90^0$ sein muss (51). Im Grenzfalle, wo der Radius gleich Null wird, sind die Asymptoten die einzigen auf einander senkrechten Tangenten.

101. Der Ort der Schnittpunkte von auf einander senkrechten Tangenten an zwei confocale Parabeln ist eine auf die gemeinschaftliche Achse senkrechte Gerade. — Wenn nämlich P ein beweglicher Punkt des Ortes ist, und M und M' die Projectionen des Brennpunktes F auf die auf einander senkrechten Tangenten von P sind, so werden die Punkte M und M' sich auf den Scheiteltangenten der Parabeln bewegen; der Mittelpunkt des Rechteckes $FMPM'$, und mit ihm der Punkt P, werden sich also auch auf Geraden bewegen, die senkrecht auf der Achse stehen.

102. Der Ort der Schnittpunkte von auf einander senkrechten Tangenten einer Parabel ist die Leitlinie der Parabel. Der Satz ist in 101. einbegriffen. Mehr unmittelbar folgt er daraus, dass die Tangenten von einem Punkte P der Leitlinie die von der Leitlinie und PF gebildeten Winkel halbiren (65).

103. Der Ort des Brennpunktes F eines Kegelschnittes, dessen anderer Brennpunkt F_1 gegeben ist, und der durch zwei gegebene Punkte X und Y geht, ist von den zwei durch F_1 gehenden Kegelschnitten mit den Brennpunkten X und Y zusammengesetzt. — Die einzelnen Theile dieses Ortes entsprechen folgender Weise der Beschaffenheit des unbekannten Kegelschnittes:

1) Wenn der unbekannte Kegelschnitt eine Ellipse sein soll, muss F auf dem nicht durch F_1 gehenden Hyperbelzweige des Ortes liegen; denn

$$F_1X + FX = F_1Y + FY$$

giebt

$$XF_1 - YF_1 = YF - XF.$$

2) Wenn der unbekannte Kegelschnitt eine Hyperbel sein soll, und X und Y auf demselben Zweige liegen sollen, muss F auf dem durch F_1 gehenden Hyperbelzweige des Ortes liegen; denn

$$F_1X - FX = F_1Y - FY$$

giebt

$$XF_1 - YF_1 = XF - YF.$$

3) Wenn der unbekannte Kegelschnitt eine Hyperbel sein soll,

und X und Y auf verschiedenen Zweigen liegen sollen, muss F auf der dem Orte gehörigen Ellipse liegen; denn

$$F_1X - FX = FY - F_1Y$$

giebt $$XF_1 + YF_1 = XF + YF.$$

Wenn der unbekannte Kegelschnitt eine Parabel sein soll (und F_1 nicht unendlich entfernt ist), muss die Achse mit einer Asymptote der dem Orte gehörigen Hyperbel parallel sein. [Uebergangsfall von 1) bis 2)].

Wenn ein oder mehrere der gegebenen Punkte F_1, X, Y sich bis ins Unendliche entfernen, bekommt man die folgenden Grenzfälle:

1) (Y unendlich entfernt). Der Ort des Brennpunktes F einer Hyperbel, deren anderer Brennpunkt F_1 gegeben ist, und die durch einen gegebenen Punkt X geht und eine gegebene Asymptotenrichtung hat, besteht aus zwei durch F_1 gehenden Parabeln, welche den Brennpunkt in X und die gegebene Asymptotenrichtung zur Achsenrichtung haben.

2) (X und Y unendlich entfernt). Der Ort des Brennpunktes F einer Hyperbel, deren anderer Brennpunkt F_1 und deren Asymptotenrichtungen gegeben sind, besteht aus den zwei durch F_1 gehenden Geraden, welche mit den beiden Asymptotenrichtungen gleiche Winkel bilden.

3) (F_1 unendlich entfernt). Der Ort des Brennpunktes F einer durch zwei gegebene Punkte X und Y gehenden Parabel mit gegebener Achsenrichtung ist die Hyperbel mit den Brennpunkten X und Y, deren eine Asymptote mit der gegebenen Achsenrichtung parallel ist.

Man kann diese Grenzfälle entweder aus dem allgemeinen Satze herleiten oder besonders beweisen.

104. Der Ort eines Brennpunktes F eines Kegelschnittes, dessen anderer Brennpunkt F_1 gegeben ist, und der durch einen gegebenen Punkt X geht und eine gegebene Gerade t berührt, ist der Kegelschnitt mit Brennpunkten in X und im symmetrischen Punkte S_1 von F_1 in Beziehung auf t und mit der Brennpunktsachse gleich F_1X, oder, anders ausgedrückt: der Kegelschnitt, welcher einen Brennpunkt in S_1 hat, während der entsprechende Leitkreis das Centrum X hat und durch F_1 geht. — Man muss nämlich haben $F_1X \pm FX = \pm FS_1$.

Grenzfälle: 1) Wenn X unendlich entfernt ist, in welchem Falle der unbekannte Kegelschnitt, statt durch einen gegebenen Punkt zu gehen, eine Hyperbel mit einer gegebenen Asymptoten-

richtung sein soll, so wird der Ort die Parabel, deren Brennpunkt in S_1 ist, und deren Leitlinie durch F_1 senkrecht auf die gegebene Asymptotenrichtung gezogen ist.

2) Wenn F_1 unendlich entfernt ist, in welchem Falle der unbekannte Kegelschnitt, statt einen gegebenen Brennpunkt zu haben, eine Parabel mit gegebener Achsenrichtung sein soll, so wird der Ort die Parabel mit dem Brennpunkte X, deren Leitlinie die in Beziehung auf t symmetrische Gerade s der von X auf die gegebene Achsenrichtung senkrecht gezogenen Gerade g ist. — Der Abstand des in Beziehung auf t symmetrischen Punktes S des unbekannten Brennpunktes F von der Geraden g ist nämlich dem Abstande FX gleich, weil S auf der Leitlinie der unbekannten Parabel liegt.

3) Wenn t unendlich entfernt ist, muss der unbekannte Kegelschnitt eine Parabel sein. Wenn in diesem Falle der gegebene Brennpunkt F_1 nicht unendlich entfernt ist, muss F unendlich entfernt sein.

105. Der Ort des Brennpunktes F eines Kegelschnittes, dessen anderer Brennpunkt F_1 gegeben ist, und der zwei gegebene Geraden t und t' berühren soll, ist die Gerade, welche auf der Verbindungslinie der symmetrischen Punkte von F_1 in Beziehung auf t und t' in ihrem Mittelpunkte senkrecht ist (37). 73. giebt eine andere Bestimmung derselben Geraden, und wenn F_1 unendlich entfernt ist, muss man sie durch 78. bestimmen.

106. Mittelst 103—105 werden die **Auflösungen** folgender **Aufgaben** auf die durch Lineal und Zirkel möglichen Bestimmungen von Schnittpunkten zweier Geraden, einer Geraden und eines Kegelschnittes, oder zweier Kegelschnitte mit einem gemeinschaftlichen Brennpunkte zurückgeführt (24. und 91.):

Einen Kegelschnitt mit einem gegebenen Brennpunkte zu construiren, welcher

entweder 1) durch drei gegebene Punkte geht;

oder 2) durch zwei gegebene Punkte geht und eine gegebene Gerade berührt;

oder 3) durch einen gegebenen Punkt geht und zwei gegebene Geraden berührt;

oder 4) drei gegebene Geraden berührt.

107. Bei wirklicher Ausführung der Auflösungen der in 106. gestellten Aufgaben ist es bequem, den unbekannten Brennpunkt F als Centrum des dem gegebenen Brennpunkte F_1 entsprechenden Leitkreises aufzusuchen. Die Auflösungen sowohl derselben Aufgaben,

als auch derjenigen, welche man erhält, indem man gegebene Punkte oder Tangenten durch die Bedingungen ersetzt, dass der gesuchte Kegelschnitt gegebene Kegelschnitte, die auch den gegebenen Brennpunkt F_1 haben, berühren sollen, ergeben sich dann mehr unmittelbar durch die folgenden Sätze:

Der einem gegebenen Brennpunkte F_1 eines gesuchten Kegelschnittes entsprechende Leitkreis $(F, 2a)$ wird

1) wenn der Kegelschnitt durch einen gegebenen Punkt X gehen soll, den durch F_1 gehenden Kreis mit dem Centrum X berühren;

2) wenn der Kegelschnitt eine gegebene Gerade t berühren soll, durch den symmetrischen Punkt von F_1 in Beziehung auf t gehen;

3) wenn der Kegelschnitt einen gegebenen Kegelschnitt mit demselben gegebenen Brennpunkte F_1 berühren soll, den F_1 entsprechenden Leitkreis dieses Kegelschnittes berühren (92).

Wenn der durch solche Bedingungen bestimmte Leitkreis sich auf eine Gerade reducirt, wird der Kegelschnitt eine Parabel mit dieser Leitlinie und mit dem gegebenen Brennpunkte F_1.

108. Der Ort eines Brennpunktes F eines Kegelschnittes, dessen anderer Brennpunkt sowohl als die Länge der Brennpunktsachse gegeben sind,

ist 1) wenn der Kegelschnitt noch durch einen gegebenen Punkt X gehen soll, von den zwei Kreisen mit dem Centrum X und mit den Halbmessern $F_1X \pm 2a$ oder $2a \pm F_1X$, je nachdem $F_1X \gtrless 2a$ ist, zusammengesetzt;

und ist 2) wenn der Kegelschnitt noch eine Gerade t berühren soll, der Kreis $(M_1, 2a)$ wo M_1 der symmetrische Punkt von F_1 in Beziehung auf t ist.

Diese Sätze folgen aus 107.

109. Wenn ein Brennpunkt F_1 gegeben ist, und man den Ort des anderen Brennpunktes F kennt, so wird der Ort des Centrums damit ähnlich und ähnlich gelegen sein in Beziehung auf F_1 als Aehnlichkeitspunkt und im Verhältnisse $\frac{1}{2}$. In den eben behandelten Fällen kennt man also auch den Ort des Centrums.

110. Ist die Lage des Centrums oder einer Achse bekannt, so wird dadurch die Anzahl der gegebenen Curvenpunkte oder Tangenten verdoppelt.

111. Der durch einen Punkt der zweiten Achse eines Kegelschnittes und durch die Berührungspunkte der Curve mit den von den genannten Punkten gezogenen Tangenten gehende Kreis geht auch durch die Brennpunkte (36. und 50.).

112. Der Kreis über die von den Schnittpunkten mit den Tangenten in den Endpunkten der Brennpunktsachse begrenzte Strecke einer willkürlichen Tangente eines Kegelschnittes als Durchmesser geht durch die Brennpunkte (82).

111. und 112. können bisweilen zur Bestimmung der Brennpunkte dienen, wenn die Lage der Brennpunktsachse bekannt ist. 76. kann zur Bestimmung des Brennpunktes einer Parabel nützlich sein.

Uebungsaufgaben.

1) Einen Kegelschnitt zu construiren, wenn die Brennpunkte und die Grösse des Winkels der durch einen gegebenen Punkt gehenden Tangenten gegeben sind.

2) Einen Kegelschnitt zu construiren, wenn ein Brennpunkt, zwei Curvenpunkte und die Länge der Brennpunktsachse gegeben sind.

3) Eine Hyperbel zu construiren, wenn ein Brennpunkt, ein Curvenpunkt und die Richtungen der Asymptoten gegeben sind.

4) Einen Kegelschnitt mit einem gegebenen Brennpunkte zu construiren, welcher durch einen gegebenen Punkt geht und eine gegebene Gerade und einen gegebenen Kegelschnitt mit demselben Brennpunkte berührt.

5) Eine Parabel mit gegebenem Brennpunkte zu construiren, welche eine gegebene Ellipse mit demselben Brennpunkte und eine gegebene Gerade berührt.

6) Eine Hyperbel zu construiren mit einem gegebenen Brennpunkte und mit einer gegebenen Asymptotenrichtung, welche eine Parabel mit demselben Brennpunkte berührt und durch einen gegebenen Punkt geht.

7) Eine Parabel mit gegebener Achse zu construiren, welche durch einen gegebenen Punkt geht und eine gegebene Gerade berührt.

8) Eine Parabel zu construiren, welche vier gegebene Gerade berührt. — Zu beweisen, dass die den von vier willkürlichen Geraden gebildeten Dreiecken umschriebenen Kreise durch einen festen Punkt gehen.

9) Einen Kegelschnitt zu construiren, der die Seiten eines gegebenen Rechteckes berührt, wenn noch der Abstand der Brennpunkte von einander bekannt ist.

10) Einen Kegelschnitt zu construiren, wenn die Lagen der Achsen und zwei Tangenten (oder eine Tangente und ihr Berührungspunkt) gegeben sind.

11) Einen Kegelschnitt zu construiren, wenn ein Brennpunkt,

der Fusspunkt einer Normale und ihr Schnittpunkt mit der zweiten Achse gegeben sind.

V. Leitlinien.

113. Mit jedem Brennpunkte einer Ellipse oder Hyperbel ist verbunden eine auf die Brennpunktsachse senkrechte Gerade, auf derselben Seite des Centrums wie der Brennpunkt und im Abstande $\frac{a}{\varepsilon}$ vom Centrum gelegen, indem a die halbe Brennpunktsachse und ε die Excentricität (26. und 41.) ist. Sie wird die Leitlinie genannt und hat folgende Eigenschaft: *das Verhältniss der Abstände eines Curvenpunktes von einem Brennpunkte und von der entsprechenden Leitlinie ist der Excentrität ε gleich.*

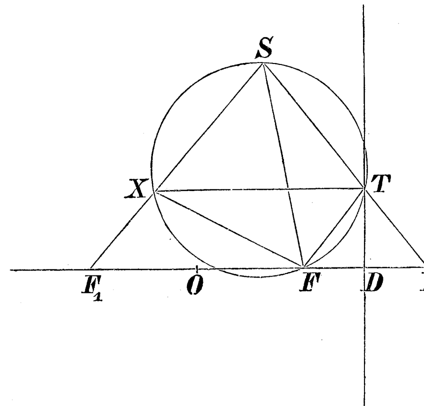


Fig. 4.

Beweis. F_1 und F seien die Brennpunkte, X ein willkürlicher Curvenpunkt, und S der durch $F_1S = 2a$ bestimmte Punkt von F_1X, also $XS = XF$. (Die Figur entspricht einer Ellipse, die Beweisführung ist jedoch auch für die Hyperbel gültig, der Punkt X mag auf dem einen oder anderen Zweige liegen.[1]) Wir bestimmen noch E durch $\triangle F_1SE \sim \triangle F_1FS$. Man findet dann, indem $F_1F = 2c = 2\varepsilon a$,

$$F_1E = \frac{2a^2}{c} = \frac{2a}{\varepsilon},$$

und E ist also ein völlig bestimmter Punkt, der fest liegt, während X die Curve durchläuft.

Ziehen wir dann $XT \parallel F_1E$, und ist T ihr Schnittpunkt mit SE, so hat man

$$\sphericalangle XFS = \sphericalangle FSX = \sphericalangle F_1ES = \sphericalangle XTS.$$

Ein Kreis kann also dem Viereck $XSTF$ umgeschrieben werden. Weil $XS = XF$ ist, hat man dann weiter:

$$\sphericalangle FTX = \sphericalangle XTS, \text{ also } \sphericalangle TFE = \sphericalangle FET \text{ und } TF = TE.$$

---

1) Nur muss man, wenn zwei hier als gleiche angezeigte Winkel entgegengesetzte Umlaufssinne haben, den einen durch sein Supplement ersetzen.

Der Ort des Punktes T ist also die auf die Gerade FE in ihrem Mittelpunkte D senkrechte Gerade. Indem $OD = \frac{1}{2} F_1E = \frac{a}{\varepsilon}$ ist, hat diese Gerade eben die Lage, durch welche wir die Leitlinie charakterisirt haben. Man sieht weiter, dass

$$\frac{FX}{TX} = \frac{XS}{XT} = \frac{F_1S}{F_1E} = \frac{2a}{\frac{2a}{\varepsilon}} = \varepsilon,$$

was zu beweisen war.

114. Der Abstand der Leitlinie vom zugehörigen Brennpunkte ist $\underline{+} \frac{a}{\varepsilon}(1 - \varepsilon^2)$, wo man, um einen positiven Ausdruck zu bekommen, $+$ für die Ellipse und $\div$ für die Hyperbel zu lesen hat. Eine Ellipse oder Hyperbel ist also durch einen Brennpunkt, die ihm zugehörige Leitlinie und die Excentricität bestimmt, indem man dann leicht ihr Centrum u. s. w. finden kann.

115. Der Ort der Punkte, deren Abstände von einem gegebenen Punkte und einer gegebenen, nicht durch den Punkt gehenden, Geraden ein gegebenes Verhältniss ε haben, ist ein Kegelschnitt, welcher einen Brennpunkt und die zugehörige Leitlinie im gegebenen Punkte und in der gegebenen Geraden hat, und mit der Excentricität ε. Er wird eine Ellipse für $\varepsilon < 1$, eine Hyperbel für $\varepsilon > 1$ und eine Parabel für $\varepsilon = 1$. Für die Parabel ist dieser Satz nur eine Wiederholung der Definition 55. Um ihre allgemeine Gültigkeit einzusehen, bemerke man erstens, dass wegen der Schlussbemerkung von 114. der Kegelschnitt, dessen Punkte die verlangte Eigenschaft haben (113), existirt. Dass aber kein anderer Punkt der Ebene dieselbe Eigenschaft haben kann, folgt daraus, dass durch diese offenbar nur zwei Punkte auf einer Geraden durch den Brennpunkt bestimmt werden, also nur die zwei Schnittpunkte mit dem gefundenen Kegelschnitte, welche immer existiren. (Vergl. Aufgabe 3, Seite 17.)

116. Kegelschnitte mit derselben Excentricität sind einander ähnlich. — Legen wir, um dieses zu beweisen, die Kegelschnitte so, dass sie einen gemeinschaftlichen Brennpunkt bekommen, und dass die Brennpunktsachsen auf dieselbe Gerade fallen; bezeichnen wir dann weiter durch X und X' zwei auf derselben Seite von F gelegene Schnittpunkte der zwei Curven mit einer durch F gehenden Geraden, durch T und T' die Projectionen dieser Punkte auf die dem Brennpunkte F zugehörigen Leitlinien der zwei Kegelschnitte, und durch D und D' die Schnittpunkte dieser Leitlinien mit der Achse, so hat man

$$\frac{FX}{FX'} = \frac{TX}{TX'} = \frac{FT}{FT'} = \frac{FD}{FD'}.$$

Alle Parabeln sind einander ähnlich.

117. Die Geraden von zwei Punkten X und Y eines Kegelschnittes an einen Brennpunkt F bilden gleiche Winkel mit der Geraden von F an den Schnittpunkt R von XY mit der dem Brennpunkte F angehörigen Leitlinie. — Wenn T und U die Projectionen von X und Y auf die Leitlinie sind, hat man nämlich (siehe Fig. 5 unten.)

$$\frac{FX}{FY} = \frac{TX}{UY} = \frac{RX}{RY}.$$

118. Eine mit einer Asymptote einer Hyperbel parallele Gerade schneidet diese in einem Punkte, der denselben Abstand von einem Brennpunkte, als von ihrem Schnittpunkte mit der zugehörigen Leitlinie hat. — Diesen Grenzfall von 117. kann man auch direct dadurch beweisen, dass, mit den Bezeichnungen von 117., wenn RX durch eine Parallele mit einer Asymptote ersetzt wird,

$$\frac{TX}{FX} = \frac{1}{\varepsilon} = \cos\theta = \frac{TX}{RX} \cdot \quad (51)$$

119. Die Geraden, welche einen Brennpunkt eines Kegelschnittes mit dem Berührungspunkte einer Tangente und mit ihrem Schnittpunkte mit der dem Brennpunkte zugehörigen Leitlinie verbinden, sind auf einander senkrecht. — Grenzfall von 117., indem X und Y zusammenfallen.

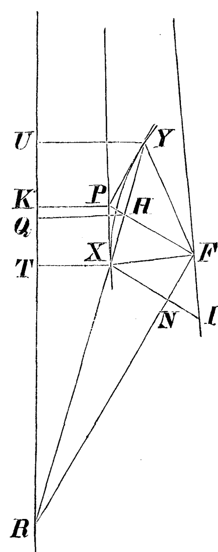


Fig. 5.

120. Wenn eine bewegliche durch einen festen Punkt R einer Leitlinie eines Kegelschnittes gehende Gerade den Kegelschnitt in X und Y schneidet, so ist der Ort des mit R in Beziehung auf X und Y harmonisch verbundenen Punktes H, die Gerade, die in F senkrecht auf FR ist (117). Sie geht durch die Berührungspunkte der durch R gehenden Tangenten (119), und durch den Schnittpunkt P der Tangenten X und Y (80).

121. Der Ort einer Sehne XY, die von einem Brennpunkte F eines Kegelschnittes mit der Excentricität ε unter einem constanten Winkel v gesehen wird, ist ein neuer Kegelschnitt mit demselben Brennpunkte F und derselben zugehörigen Leitlinie wie der gegebene Kegelschnitt, und mit der Excentricität $\varepsilon \,.\, \cos \frac{1}{2} v$. — Man hat nämlich, indem man dieselben Bezeichnungen wie in 117. und 120. benutzt, und noch durch Q

die Projection von H auf die Leitlinie und durch N die Projection von X auf FR bezeichnet,

$$\frac{FH}{QH} = \frac{NX}{TX} = \frac{FX \cos \frac{1}{2}v}{TX} = \varepsilon \,.\, \cos \tfrac{1}{2}v.$$

Der Ort des Punktes H ist also der im Satze genannte neue Kegelschnitt, und RH wird diesen Kegelschnitt in H berühren (119).

122. Der Ort des Schnittpunktes P der Tangenten eines Kegelschnittes in zwei solchen Punkten X und Y, deren Verbindungssehne XY von einem Brennpunkte F unter dem Winkel v gesehen wird, ist ein neuer Kegelschnitt mit demselben Brennpunkte F und derselben zugehörigen Leitlinie wie der gegebene Kegelschnitt und mit der Excentricität $\varepsilon \,.\, \sec \frac{1}{2}v$. — Wir benutzen dieselben Benennungen wie in 121. und bezeichnen noch durch K die Projection von P auf die Leitlinie und durch I den Schnittpunkt von XN mit der in F auf FX senkrechten Geraden. Man hat dann, weil FI die Leitlinie im selben Punkte wie PX trifft (119),

$$\frac{FP}{KP} = \frac{IX}{TX} = \frac{FX \sec \frac{1}{2}v}{TX} = \varepsilon \sec \tfrac{1}{2}v.$$

123. Aufgabe. Einen Kegelschnitt zu construiren, wenn ein Brennpunkt, die zugehörige Leitlinie und entweder ein Curvenpunkt oder eine Tangente gegeben sind. — **Auflösung:** Ein gegebener Punkt bestimmt die Excentricität; der Berührungspunkt einer gegebenen Tangente wird mittelst 119. gefunden (114).

Der Umstand, dass der gesuchte Kegelschnitt in beiden Fällen eindeutig bestimmt wird, zeigt, dass zwei willkürliche Kegelschnitte, die einen Brennpunkt und die zugehörige Leitlinie gemein haben, immer in den in 121. und 122. angegebenen Verbindungen stehen, und dass der constante Winkel v für beide Verbindungen denselben Werth hat.

124. Wenn ein Kegelschnitt einen gegebenen Brennpunkt F hat und durch zwei gegebene Punkte X und Y geht, so ist der Ort der zu F gehörigen Leitlinie aus den beiden Punkten zusammengesetzt, wo die Halbirungslinien der von FX und FY gebildeten Winkel die Gerade XY treffen (117). Dieser Satz giebt ein neues Mittel dazu, einen Kegelschnitt mit einem gegebenen Brennpunkte durch drei gegebene Punkte zu legen. (Vergl. 106.)

125. Hilfsatz. Wenn Geraden von einem festen Punkte O an vier Punkte A, B, C, D einer Geraden, eine andere Gerade in A', B', C', D' treffen, so ist

$$\frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} = \frac{A'C'}{A'D'} : \frac{B'C'}{B'D'}.$$

Aus dieser Relation, die in den grösseren Elementarbüchern bewiesen wird, folgt, dass, wenn A und B in Beziehung auf C und D harmonisch verbunden sind, auch A' und B' in Beziehung auf C' und D' harmonisch verbunden sein müssen.

126. Wenn ein Kegelschnitt einen gegebenen Brennpunkt F und zwei gegebene Tangenten hat, ist der Ort der zu F gehörigen Leitlinie ein Punkt. Dieser Punkt liegt auf der Geraden, welche in F senkrecht steht auf der von F an den Schnittpunkt P der Tangenten gezogenen Geraden FP, und ist mit F harmonisch verbunden in Beziehung auf die Schnittpunkte mit den zwei Tangenten.

127. Wenn ein Kegelschnitt eine gegebene Leitlinie hat und durch zwei gegebene Punkte geht, so ist der Ort des zur Leitlinie gehörigen Brennpunktes ein Kreis, dessen Centrum sich auf der Verbindungsgeraden der gegebenen Punkte befindet. — Das Verhältniss der Abstände des Brennpunktes von den gegebenen Curvenpunkten wird nämlich bekannt sein (siehe 113. und den Specialfall von 10.).

128. Wenn ein Kegelschnitt mit gegebener Excentricität ε durch einen gegebenen Punkt geht, und wenn noch ein Brennpunkt, oder eine Leitlinie, gegeben ist, so wird der Ort der zugehörigen Leitlinie, resp. des zugehörigen Brennpunktes, ein Kreis sein mit Centrum im gegebenen Punkte (113).

129. Wenn eine Tangente eines Kegelschnittes den Winkel m mit einer Leitlinie und den Winkel n mit der Geraden von ihrem Schnittpunkte R mit der Leitlinie an den zu dieser gehörigen Brennpunkt bildet, so ist (119)

$$\frac{\sin n}{\sin m} = \pm \varepsilon,$$

wo die zwei Vorzeichen den zwei vom selben Punkte der Leitlinie ausgehenden Tangenten entsprechen.

Dadurch findet man, dass, wenn die Excentricität, eine Tangente und eine Leitlinie eines Kegelschnittes gegeben sind, der Ort des der Leitlinie gehörigen Brennpunktes aus zwei Geraden durch R besteht. Dasselbe folgt auch aus 116., woraus man noch folgern kann, dass auch die Orte der anderen mit dem Kegelschnitte verbundenen charakterisirten Punkte (des anderen Brennpunktes, der Scheitel etc.) aus Geraden durch R bestehen.

Im Falle $\varepsilon = 1$ wird die eine der Geraden, welche den Ort des Brennpunktes bilden, mit der gegebenen Leitlinie zusammenfallen und entspricht einem unendlich flachen Kegelschnitte (39, 2;

54, 1; 67, 1); die andere wird der Ort der Brennpunkte der Parabeln sein, welche eine gegebene Leitlinie und eine gegebene Tangente haben.

Uebungsaufgaben.

1) Den Ort der Endpunkte von Strecken der Tangenten eines Kegelschnittes, welche, von dem Berührungspunkte aus gerechnet, von einem Brennpunkte unter einen gegebenen Winkel gesehen werden, zu finden.

2) Den Ort der Tangenten einer Reihe von Kegelschnitten, die einen Brennpunkt und die zugehörige Leitlinie gemein haben, in ihren Schnittpunkten mit einer festen Geraden zu finden.

3) An einen gegebenen Kegelschnitt eine Tangente zu legen, deren durch den Berührungspunkt und den Schnittpunkt mit einer Leitlinie begrenzte Strecke von einem gegebenen Punkt der Brennpunktsachse unter einem rechten Winkel gesehen wird.

4) Den Ort der Geraden zu finden, die durch einen beweglichen Punkt einer Leitlinie eines Kegelschnittes zur Berührungssehne desselben Punktes parallel gezogen werden. (Die Berührungssehne eines Punktes ist die Verbindungslinie der Berührungspunkte der vom Punkte ausgehenden Tangenten).

5) Zwei Kegelschnitte mit einem gemeinschaftlichen Brennpunkte sind gegeben. Eine Gerade zu construiren, auf welcher die Kegelschnitte Sehnen abschneiden, die vom gemeinschaftlichen Brennpunkte unter gegebenen Winkeln gesehen werden.

6) Ein Vieleck ist dem einen von zwei Kegelschnitten, die einen Brennpunkt und die zugehörige Leitlinie gemein haben, eingeschrieben, dem anderen umgeschrieben. Zu beweisen, dass in diesem Falle unendlich viele Vielecke in derselben Verbindung mit den zwei Kegelschnitten stehen.

7) Für welche Werthe von n kann man mittelst des Lineals und des Zirkels einem gegebenen Kegelschnitte ein n-Eck einschreiben, das einem unbekannten Kegelschnitte, der einen Brennpunkt und die zugehörige Leitlinie mit dem gegebenen gemein hat, umgeschrieben ist?

8) Einen Kegelschnitt zu construiren, der zwei gegebene Tangenten und einen gegebenen Brennpunkt hat, wenn die diesem zugehörige Leitlinie vom Schnittpunkte der gegebenen Tangenten einen gegebenen Abstand haben soll.

9) Eine Hyperbel mit einer gegebenen Leitlinie und einer

gegebenen Asymptotenrichtung durch zwei gegebene Punkte zu legen.

10) Einen Kegelschnitt zu construiren, wenn die beiden Leitlinien, eine Tangente und ihr Berührungspunkt gegeben sind.

11) Einen Kegelschnitt zu construiren, wenn eine Tangente und ihr Berührungspunkt, die Excentricität und entweder ein Brennpunkt oder eine Leitlinie gegeben sind.

12) Einen Kegelschnitt mit gegebener Excentricität, einer gegebenen Leitlinie, einer gegebenen Tangente und einer gegebenen Normale zu construiren.

13) Zu beweisen, dass alle Kegelschnitte mit einem gegebenen Brennpunkte, welche eine durch diesen gehende Gerade in festen Punkten schneiden, denselben Parameter haben.

VI. Durchmesser.

130. Wir haben schon die durch das Centrum einer Ellipse oder Hyperbel gehenden Geraden die Durchmesser dieser Curven genannt (30. und 45.). Eine Ellipse wird von jedem Durchmesser und eine Hyperbel von demjenigen Durchmesser, der im selben Paare der von den Asymptoten gebildeten Scheitelwinkel wie die Brennpunktsachse liegt, in zwei Punkten getroffen. Die übrigen Durchmesser der Hyperbel treffen sie gar nicht (53).

131. Wenn ein Durchmesser die Curve zweimal trifft, sind die Tangenten in den Schnittpunkten parallel; umgekehrt ist die Gerade, welche die Berührungspunkte zweier parallelen Tangenten verbindet, immer ein Durchmesser. (Folgt aus den Tangentenconstructionen 68. und 70.).

132. Indem man die Parabel als Grenzform einer Ellipse oder einer Hyperbel, deren Centrum dann unendlich entfernt ist, betrachtet, muss man die mit der Achse parallelen Geraden die Durchmesser der Parabel nennen. Eine Parabel wird von jedem Durchmesser in einem Punkte getroffen (62).

133. Beim Studium der wichtigen Eigenschaften der Durchmesser benutzen wir für alle drei Arten von Kegelschnitten den folgenden Satz:

Wenn eine Tangente eines Kegelschnittes mit einer Sehne XY parallel ist, so wird ihr Berührungspunkt Z der Mittelpunkt der von ihren Schnittpunkten Q und R mit den Tangenten in X und Y begrenzten Strecke sein.

Verbinden wir, um dieses zu beweisen, einen Brennpunkt F der Curve mit dem Schnittpunkte P der zwei Tangenten XQ und YR, und mit den Punkten X, Q, Z, Y, R. Dann ist (80)

$$\sphericalangle XFQ = \sphericalangle QFZ, \quad \sphericalangle ZFR = \sphericalangle RFY, \quad \sphericalangle XFP = \sphericalangle PFY$$

und also

$$\triangle XFQ : \triangle QFZ = FX : FZ$$
$$\triangle ZFR : \triangle RFY = FZ : FY$$
$$\triangle RFY : \triangle XFQ = \triangle PFY : \triangle XFP = FY : FX.$$

Durch Multiplication erhält man aus diesen Gleichungen $\triangle QFZ = \triangle ZFR$ und also $QZ = ZR$.

134. Der Satz 133 wird dazu dienen zu beweisen, dass der Ort der Mittelpunkte einer Reihe von parallelen Sehnen immer ein Durchmesser ist. Bei der vollständigen Beweisführung für diesen Satz, und bei der weiteren Verfolgung seiner Consequenzen, wird es bequem sein die Ellipse und Hyperbel für sich, und die Parabel für sich zu betrachten. Wir bemerken jedoch schon hier, dass er, folgendermassen begrenzt, unmittelbar aus 133. folgt:

Der Ort der Mittelpunkte einer Reihe von Sehnen einer Ellipse oder Hyperbel, die mit zwei Tangenten der Curven parallel sind, ist der durch die Berührungspunkte der Tangenten gehende Durchmesser. — Bezeichnen wir nämlich die zwei Berührungspunkte durch Z_1 und Z_2, die Endpunkte einer willkürlichen Sehne der Reihe durch X und Y, ihren Mittelpunkt durch M und den Schnittpunkt der Tangenten in X und Y durch P, so liegen (wegen 133.) P, M und Z_1 auf einer Geraden, ebenso P, M und Z_2. Diese Geraden müssen zusammenfallen in den Durchmesser $Z_1 Z_2$.

Hierdurch ist der Hauptsatz für die Ellipse schon vollständig bewiesen.

Anmerkung: Wir haben hier schlechthin den Durchmesser, das heist die unendliche Gerade den Ort gewisser Punkte genannt, wenn selbst nur der durch Z_1 und Z_2 auswendig oder inwendig begrenzte Theil dieser Geraden wirklich solche Punkte enthält. Wir werden uns auch in der Folge dieser gewöhnlichen Redensart bedienen und eine Gerade oder Curve den geometrischen Ort gewisser Punkte nennen, wenn selbst nur alle Punkte eines begrenzten Theiles dieser Linie — und keine andern Punkte der Ebene — die solche Punkte charakterisirende Eigenschaft haben.

1) Ellipse und Hyperbel.

135. Die Sehnen, welche die Endpunkte eines Durchmessers mit einem willkürlichen Curvenpunkte verbinden, werden supplementare Sehnen genannt.

Eine Figur zeigt unmittelbar, dass der Durchmesser, welcher der einen von zwei supplementaren Sehnen parallel ist, die andere halbirt, und umgekehrt. Von zwei supplementaren Sehnen einer Hyperbel ist immer die eine einem solchen Durchmesser parallel, der die Curve schneidet, die andere einem solchen, der die Curve nicht schneidet (53. und 130.). Einen Grenzfall von supplementaren Sehnen einer Hyperbel bilden zwei parallel mit einer Asymptote durch die zwei Schnittpunkte eines Durchmessers gezogene Geraden.

136. Die Sehnen, welche einer gegebenen Reihe von parallelen Sehnen supplementar sind, bilden selbst eine Reihe von parallelen Sehnen. — Wenn nämlich die gegebenen Sehnen mit zwei Tangenten parallel sind, haben wir in 134. bewiesen, dass sie von einem festen Durchmesser halbirt werden, und mit diesem müssen dann die supplementaren Sehnen parallel sein (135). Wenn dagegen die gegebenen Sehnen mit keiner Tangente parallel sind, also beide Zweige der Curve, die dann eine Hyperbel ist, schneiden (53), so muss jede supplementare Sehne einen Zweig schneiden, also mit zwei Tangenten parallel sein und folglich (134) von dem Durchmesser, welcher die Berührungspunkte dieser Tangenten verbindet, halbirt werden. Dieser Durchmesser ist mit der gegebenen Reihe von Sehnen parallel (135), also fest, und folglich bleiben die mit den supplementaren Sehnen parallelen Tangenten auch fest.

137. Der Ort der Mittelpunkte einer Reihe von parallelen Sehnen ist ein Durchmesser. In dem in der Beweisführung von 134. nicht berücksichtigten Falle folgt der Satz aus 136., indem alle Sehnen von dem mit den supplementaren Sehnen parallelen Durchmesser halbirt werden.

138. Wenn ein Durchmesser die mit einem andern Durchmesser parallelen Sehnen halbirt, wird auch der andere die mit dem ersten parallelen Sehnen halbiren (136. und 137.). Solche Durchmesserpaare werden conjugirte Durchmesser genannt. Die Achsen sind conjugirte Durchmesser.

139. Man findet die Richtungen sämmtlicher Systeme von supplementaren Sehnen und sämmtlicher Paare von conjugirten Durchmessern, indem man die Endpunkte eines festen Durchmessers mit einem Punkte, der die ganze Curve durchläuft, verbindet. Dadurch erhält man die folgenden Lagenverhältnisse:

Zwei Paare von conjugirten Durchmessern einer Ellipse trennen sich, das heisst, die Durchmesser des einen Paares liegen in verschiedenen der vom anderen Paare gebildeten Scheitelwinkelpaare. Dagegen trennen zwei Paare von conjugirten Durchmessern einer Hyperbel sich nicht. Zwei conjugirte Durchmesser einer Hyperbel trennen die Asymptoten. Ein Durchmesser einer Hyperbel, der mit einer Asymptote zusammenfällt, ist sein eigener conjugirter Durchmesser. Wenn man die supplementaren Sehnen von den Endpunkten der Brennpunktsachse ausgehen lässt, wird man weiter sehen, dass die Achsen die einzigen conjugirten Durchmesser sind, welche rechte Winkel bilden; nur im Kreise sind alle conjugirte Durchmesserpaare rechtwinklig.

140. Die Geraden XX' und YY', welche die Endpunkte zweier parallelen Sehnen XY und $X'Y'$ verbinden, schneiden sich in einem Punkte des Durchmessers, welcher die Sehnen halbirt. Durch Zusammenfallen der Sehnen sieht man, dass die Tangenten in den Endpunkten einer Sehne sich in einem Punkte des die Sehne halbirenden Durchmessers schneiden. Im Falle, wo der Durchmesser die Curve schneidet, ist dieses schon in 134. bewiesen.

Von einem Durchmesser, welcher die Curve schneidet, sind die auf ihrer concaven Seite gelegenen Punkte Sehnenmittelpunkte, die auf der convexen Seite gelegenen Punkte Tangentenschnittpunkte; alle Punkte eines die Curve (Hyperbel) nicht schneidenden Durchmessers haben beide Eigenschaften.

141. Concentrische, ähnliche und ähnlich gelegene Ellipsen oder Hyperbeln haben die selben conjugirten Durchmesser. Dies zeigt sich, wenn man entsprechende Sehnen der ähnlichen Figuren betrachtet.

142. Das Product (siehe Fig. 6 auf der nächsten Seite) $ZQ \cdot Z_1Q_1$ der Strecken zweier festen und parallelen Tangenten von ihren Berührungspunkten bis zu ihren Schnittpunkten mit einer beweglichen Tangente ist dem Producte der Brennstrahlen an einen der festen Berührungspunkte gleich. Obschon die Brennstrahlen als positiv gerechnet werden, muss man doch diesem Werthe des Productes das Zeichen $+$ geben für die Ellipse, das Zeichen $\div$ für die Hyperbel. — Verbinden wir, um diesen Satz zu beweisen, den Brennpunkt F mit den Punkten Z, Z_1, Q und Q_1 und mit dem Berührungspunkte X der beweglichen Tangente, dann ist, weil die Brennstrahlen gleiche Winkel mit den parallelen Tangenten bilden,

$$\sphericalangle FZQ = \sphericalangle Q_1Z_1F = \tfrac{1}{2} \sphericalangle ZFZ_1.$$

Ausserdem giebt 80., dass

$$\sphericalangle Z_1FQ_1 = \tfrac{1}{2} \sphericalangle Z_1FX$$
$$\sphericalangle QFZ = \tfrac{1}{2} \sphericalangle XFZ.$$

Also

$$\sphericalangle Q_1Z_1F + \sphericalangle Z_1FQ_1 + \sphericalangle QFZ = 180^0$$

und folglich

$$\sphericalangle QFZ = \sphericalangle FQ_1Z_1$$
$$\triangle FZQ \sim \triangle Q_1Z_1F,$$

woraus

$$ZQ : FZ = FZ_1 : Z_1Q_1.$$

Da FZ_1 dem Brennstrahle vom andern Brennpunkte an Z gleich ist, wird diese Proportion eben den zu beweisenden Satz ausdrücken.

143. Das Product $ZQ \,.\, ZR$ der Strecken einer Tangente vom Berührungspunkte Z bis zu den Schnittpunkten Q und R mit zwei conjugirten Durchmessern ist, mit dem Zeichen $\div$ für die Ellipse und dem Zeichen $+$ für die Hyperbel, dem Producte der Brennstrahlen an den Berührungspunkt gleich. — Dieser Satz ist eine Folge von 142., indem die Durchmesser OQ und OQ_1, die wegen 140. die supplementaren Sehnen Z_1X und ZX halbiren, conjugirt sind. — Weil die Tangente in Z mit dem Z_1Z conjugirten Durchmesser parallel ist (134), konnte man auch aus diesem Satze die in 139. beschriebenen Lagenverhältnisse zweier Paare conjugirter Durchmesser herleiten.

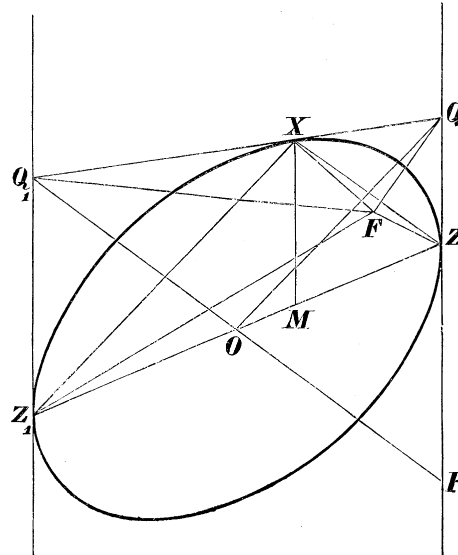


Fig. 6.

144. Wenn zwei conjugirte Durchmesser die Winkel v und v' mit der Brennpunktsachse bilden, ist $\operatorname{tg} v \,.\, \operatorname{tg} v' = \varepsilon^2 - 1$. Dies zeigt sich durch Anwendung von 143. auf den Fall, wo Z_1Z die Brennpunktsachse ist.

145. Die Länge eines Durchmessers in einer Ellipse ist $2\sqrt{ff_1}$, wenn f und f_1 die Längen der Brennstrahlen an den Be-

rührungspunkt einer mit dem Durchmesser parallelen Tangente sind. — Dies zeigt sich durch Anwendung von 142. auf den Fall, wo die Tangente $Q_1 Q$ mit $Z_1 Z$ parallel ist.

146. Die Asymptoten einer Hyperbel schneiden eine willkürliche Tangente in zwei Punkten, welche dieselbe Entfernung vom Berührungspunkte haben, und die von einander um $2\sqrt{ff_1}$ entfernt sind. — Dies folgt aus 143., indem man die zwei conjugirten Durchmesser mit einer Asymptote zusammenfallen lässt (139). Es wird — wegen der Uebereinstimmung mit dem in 145. gefundenen Ausdrucke — bequem sein, die gefundene durch die Asymptoten begrenzte Strecke einer Hyperbeltangente „die Länge des mit der Tangente parallelen Durchmessers" zu nennen. Eben weil dieser Durchmesser die Hyperbel nicht schneidet, und also an und für sich gar keine Länge hat, wird durch die Einführung dieser Benennung gar keine störende Collision entstehen können. Die Länge $2b$ der zweiten Achse der Hyperbel wird $2a\sqrt{\varepsilon^2 - 1} = 2\sqrt{c^2 - a^2}$, und ganz wie für die Ellipse (33), hat man für die Hyperbel $p = \frac{2b^2}{a}$, indem p der Parameter ist (48). Man hat weiter $\operatorname{tg} \theta = \frac{b}{a}$ (51).

Die Hälfte der wirklichen und der hier definirten Längen von Durchmessern werden wir Halbmesser nennen.

147. Ein Durchmesser einer Hyperbel halbirt auch die durch die Asymptoten begrenzten Strecken der mit dem conjugirten Durchmesser paralleler Geraden (146). Hyperbeln mit denselben Asymptoten haben also dieselben conjugirten Durchmesser. Weil diejenigen Hyperbeln, die in denselben von den Asymptoten gebildeten Scheitelwinkeln liegen, dieselbe Excentricität haben (51) und also ähnlich sind (116), ist der hier gefundene Satz theilweise eine Folge von 141.

148. Wenn a' und b' zwei willkürliche conjugirte Halbmesser einer Ellipse, resp. Hyperbel sind, so wird $a'^2 + b'^2$ resp. $a'^2 - b'^2$ einen constanten Werth haben. — Weil nämlich wenigstens einer der Durchmesser die Curve wirklich schneidet, können wir annehmen, dass dieses mit $2a'$ der Fall ist und seinen einen Endpunkt X nennen. a' wird dann Medianlinie sein in einem Dreiecke XF_1F mit den Seiten $F_1F = 2\varepsilon a$, $F_1X = f_1$ und $FX = f$. Man hat dann (145. und 146.)

$$2(a'^2 + \varepsilon^2 a^2) = f^2 + f_1^2 = 4a^2 \mp 2ff_1 = 4a^2 \mp 2b'^2,$$

woraus, indem $\pm b^2 = a^2(1 - \varepsilon^2)$,

folgt: $a'^2 \pm b'^2 = a^2 \pm b^2$.

149. Wenn a' und b' zwei willkürliche conjugirte Halbmesser einer Ellipse oder Hyperbel sind, und α der von ihnen gebildete Winkel ist, hat $a'b' \sin\alpha$ einen constanten Werth. — Bezeichnen wir nämlich durch M und M_1 die Projectionen der Brennpunkte F und F_1 auf die Tangente in einem Endpunkte X des Durchmessers $2a'$, so hat man (71. und 145., 146.)

$$\frac{FX}{FM} = \frac{F_1X}{F_1M_1} = \frac{FX \pm F_1X}{FM \pm F_1M_1} = \frac{2a}{2a' \sin\alpha}$$

$$= \frac{\sqrt{FX \cdot F_1X_1}}{\sqrt{FM \cdot F_1M_1}} = \frac{b'}{b}.$$

Für die Hyperbel ist dieser Satz auch eine Folge von 84., oder würde umgekehrt einen neuen Beweis von 84. geben. Für die Ellipse kann er auch so ausgedrückt werden: Ein von zwei conjugirten Halbmessern und einer Sehne einer Ellipse begrenztes Dreieck hat ein constantes Areal.

150. Aufgabe: Eine Hyperbel zu construiren wenn die Lagen und Grössen zweier conjugirten Halbmesser gegeben sind; wir setzen dabei voraus, dass es auch bekannt ist, welcher der Durchmesser die Curve wirklich schneidet. — **Auflösung:** Durch das Gegebene sind das Centrum O, ein Curvenpunkt Z, die Tangente in diesem Punkte, ihre Schnittpunkte G und G_1 mit den Asymptoten, also auch die Asymptoten völlig bestimmt. Die Achsen sind dann die Halbirungslinien der Asymptotenwinkel, die Brennpunktsachse diejenige, welche die endliche Strecke GG_1 trifft. Wegen 84. (149) ist weiter der Abstand c der Brennpunkte vom Centrum dem geometrischen Mittel der Strecken OG und OG_1 gleich. Dass nun auch umgekehrt die durch die Lagen der Brennpunkte und den Asymptotenwinkel völlig bestimmte (51) Hyperbel wirklich die gegebenen Bedingungen erfüllt, folgt aus den benutzten Sätzen. Die Aufgabe ist also immer möglich und hat eine einzige Auflösung. Die gesuchte Hyperbel kann dann auch durch die Brennpunkte und den Punkt Z bestimmt werden.

151. Aufgabe: Eine Ellipse zu construiren, wenn die Lagen und Grössen zweier conjugirten Durchmesser gegeben sind. — Diese Aufgabe lässt sich leicht auf die vorige zurückführen. Für die mit der gesuchten Ellipse confocale Hyperbel, welche durch den Endpunkt Z eines der gegebenen Durchmesser geht, hat näm-

lich der diesem Durchmesser conjugirte Durchmesser dieselbe Länge wie für die Ellipse (145. und 146.), und er ist auf dem conjugirten Durchmesser der Ellipse senkrecht, weil die Curven sich rechtwinklig schneiden (94). Die Brennpunkte dieser Hyperbel, welche auch der Ellipse gehören, werden also bestimmt wie in 150. und die Aufgabe wird immer möglich und hat nur eine Auflösung. In folgender Weise kann man die **Auflösung** unabhängig von der Hyperbel ausdrücken: Von einem Endpunkte Z einer der gegebenen Durchmesser $2a'$ zieht man eine Gerade senkrecht auf den anderen $2b'$, und bestimmt auf dieser Geraden zwei Punkte G und G_1 so, dass $GZ = ZG_1 = b'$. Dann ist die Brennpunktsachse diejenige der Halbirungslinien der von OG und OG_1 gebildeten Winkel, welche die endliche Strecke G_1G trifft, und der Abstand c der Brennpunkte vom Centrum ist das geometrische Mittel der Strecken OG und OG_1. 152. wird ein Mittel zu unmittelbarer Construction der Längen der Achsen enthalten.

152. An die in 150. und 151. gegebenen Constructionen knüpft sich eine merkwürdige Verbindung*) von zwei Paaren confocaler Kegelschnitte. Das erste Paar besteht aus einer Ellipse (x) und einer Hyperbel (y) mit den Brennpunkten F und F_1 und dem Centrum O, das andere aus der Ellipse (ξ) und der Hyperbel (η), deren Brennpunkte die Schnittpunkte G und G_1 der Asymptoten der Hyperbel (y) mit der Tangente in einem ihrer Schnittpunkte Z mit (x) sind, und die durch O gehen. Die Asymptoten der Hyperbel (η) werden die Geraden ZF und ZF_1 sein (150. und 146.), und die Verbindung der zwei Paare von Kegelschnitten wird also eine gegenseitige sein.

OZ ist ein gemeinschaftlicher Halbmesser a' aller vier Kegelschnitte. Sein conjugirter Durchmesser in einem Paare (x), (y), resp. (ξ), (η), ist dem Centralabstande γ, resp. c, der Brennpunkte im anderen Paare gleich. Bezeichnen wir noch die Halbachsen der Kegelschnitte (x), (y), (ξ), (η) durch a, b; a_1, b_1; α, β; α_1, β_1; so haben wir (148) die folgenden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} a^2 + b^2 &= a'^2 + \gamma^2, \\ a_1^{\,2} - b_1^{\,2} &= a'^2 - \gamma^2, \\ \alpha^2 + \beta^2 &= a'^2 + c^2, \\ \alpha_1^{\,2} - \beta_1^{\,2} &= a'^2 - c^2, \end{aligned}\right\} (1)$$

*) Diese Verbindung ist erst von Chasles gefunden (Apercue historique p. 359—362).

und (29. und 146.)

$$\left.\begin{array}{l}\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = \alpha_1{}^2 + \beta_1{}^2 \\ c^2 = a^2 - b^2 = a_1{}^2 + b_1{}^2.\end{array}\right\}(2)$$

Hieraus erhält man durch Subtraction der ersten und dritten Gleichung (1) und durch Einsetzung der ersten Ausdrücke (2) für γ^2 und c^2, dass $a^2 = \alpha^2$, und also, weil wir die Achsen als positiv rechnen, $a = \alpha$. Ganz ebenso erhält man $b = \alpha_1$, $a_1 = \beta$, $b_1 = \beta_1$. Also: die Achsen der Ellipse des einen Paares sind den Brennpunktsachsen des andern Paares gleich, und die Achsen der Hyperbel des einen Paares sind den zweiten Achsen des andern Paares gleich.

Man erhält dadurch die folgende neue Bestimmung der Achsen der in 151. gesuchten Ellipse:

$$2a = GO + G_1O,\ 2b = GO - G_1O,$$

indem wir $GO > G_1O$ voraussetzen.

Als Uebung empfehlen wir eine directe Herleitung der hier gegebenen Bestimmung aus 143., 148. und 149.

Einige Constructionen, die sich an die Bestimmung der Ellipse oder Hyperbel durch zwei conjugirte Durchmesser unmittelbar anschliessen, werden später folgen (166. und 173.).

153. Wenn ein Durchmesser eine Ellipse oder Hyperbel in Z_1 und Z schneidet, wenn M der Mittelpunkt und X ein Endpunkt einer durch Z_1Z halbirten Sehne ist, und wenn wir durch $2a'$ und $2b'$ die Längen von Z_1Z und von seinem conjugirten Durchmesser bezeichnen, so ist

$$\frac{MX^2}{Z_1M \,.\, MZ} = \pm \frac{b'^2}{a'^2},$$

indem das obere Zeichen der Ellipse das untere der Hyperbel entspricht. — Aehnliche Dreiecke in Fig. 6 Seite 42 geben nämlich

$$\frac{MX}{Z_1M} = \frac{ZQ}{OZ} \text{ und } \frac{MX}{MZ} = \frac{Z_1Q_1}{Z_1O},$$

woraus man durch Multiplication die zu beweisende Relation erhält (142). Wenn wir die halbe Sehne MX (die Ordinate) y und die Strecke OM (die Abscisse) x nennen, so kann diese Relation geschrieben werden:

$$\frac{x^2}{a'^2} \pm \frac{y^2}{b'^2} = 1.$$

Wenn umgekehrt diese Relation gegeben ist, und $MX = y$ eine constante Richtung hat, wird der Punkt X eine Ellipse, resp. Hyperbel durchlaufen. Man kann nämlich eine solche bestimmen

durch den Durchmesser $Z_1 Z = 2a'$ und den mit der gegebenen Richtung parallelen Durchmesser $2b'$ (151. und 150.). Die Punkte dieser Curve und kein anderer Punkt einer Geraden von der gegebenen Richtung, erfüllen dann die gegebene Relation.

Die gefundene Bestimmung der Punkte einer Ellipse oder Hyperbel ist diejenige, durch welche man in der analytischen Geometrie diese Curven auf zwei conjugirte Durchmesser, speciell auf die Achsen, bezieht.

154. Durch die Lagen eines Paares conjugirter Durchmesser und zwei Curvenpunkte ist ein Kegelschnitt immer und eindeutig bestimmt. Dies folgt aus 153., wo man aus zwei gegebenen Werthpaaren von x und y, die Werthe von $\frac{1}{a'^2}$ und $\pm \frac{1}{b'^2}$ herleiten kann. Der eine dieser Werthe ist immer positiv, und man kann die Benennungen so wählen, das dieser $\frac{1}{a'^2}$ wird; je nachdem der andere positiv oder negativ ist, wird die Curve eine Ellipse oder Hyperbel sein.

Um eine constructive Bestimmung zu haben, konnte man mittelst der gegebenen Punkte noch ein Paar conjugirter Durchmesser bestimmen und dann die nachfolgende Construction benutzen.

155. Aufgabe. Die Lagen zweier Paare von conjugirten Durchmessern sind gegeben, die Lagen der Achsen und das Verhältniss ihrer Längen zu bestimmen. — **Auflösung:** Es wird immer durch einen willkürlichen Punkt Z eines der Durchmesser ein Kegelschnitt gehen mit denselben Lagen aller conjugirter Durchmesser (141. und 147.), also auch der Achsen, und mit denselben Verhältnissen der Achsenlängen (141. und 146.). Die Tangente dieses Kegelschnittes in Z ist mit dem conjugirten Durchmesser parallel. Wenn Q und R die Schnittpunkte dieser Tangente mit dem anderen gegebenen Paare von conjugirten Durchmessern sind, so ist die Curve eine Ellipse oder Hyperbel je nachdem Z auf der endlichen Strecke QR liegt oder nicht, und der dem OZ conjugirte Durchmesser hat die Länge $\sqrt{QZ \cdot ZR}$, resp. $\sqrt{ZQ \cdot ZR}$. Die Aufgabe ist also auf 151. oder 150. zurückgeführt. Man könnte übrigens mehr direct die Lagen der Achsen dadurch bestimmen, dass ihre Schnittpunkte mit der Tangente auf der Kreisperipherie mit Centrum auf der Tangente liegen müssen, welche die Gerade OZ in denselben Punkten wie die durch O, Q und R gehende Kreisperipherie schneidet (143).

156. Die bis jetzt behandelten Constructionsaufgaben sind mittelst des Lineals und des Zirkels gelöst ohne directe Benutzung

gezeichneter Kegelschnitte, und wenn wir nicht ausdrücklich anders sagen, werden wir auch in der Folge diese Forderung festhalten. Man kann sich aber auch die Kegelschnitte so genau gezeichnet denken, dass sie zur Ausführung der Constructionen benutzt werden können. Bei solchen Constructionen werden die Durchmessersätze oft nützlich sein. Man findet die Durchmesser eines vollständig gezeichneten Kegelschnittes durch Verbindung der Mittelpunkte zweier parallelen Sehnen. Zwei Durchmesser bestimmen das Centrum, durch welches man dann die conjugirten Durchmesser ziehen kann. Man erhält dadurch die Lagen der Achsen und Asymptoten (155), durch die Asymptoten auch die Längen der nicht schneidenden Durchmesser, und endlich die Brennpunkte (am bequemsten durch die Längen der Achsen). Die Lagen der Achsen liessen sich auch bestimmen durch einen mit dem Kegelschnitte concentrischen Kreis, welcher die Curve schneidet. Die Mittelpunkte der Sehnen, welche er mit dem Kegelschnitte gemein hat, und welche nicht durch das Centrum gehen, müssen nämlich auf den Achsen liegen. Mittelst der Durchmesserssätze kann man auch leicht ohne Achsen oder Brennpunkte voraus zu construiren, an einen solchen gezeichneten Kegelschnitt die Tangente in einem gegebenen Punkte, oder die mit einer Geraden parallelen Tangenten legen. [Wenn die gefundenen Durchmesser parallel sind, muss die Curve eine Parabel sein, deren Achse und Brennpunkt sich leicht bestimmen lassen; siehe im Folgenden 158].

157. Die Sehnen, welche vom Centrum einer Ellipse oder Hyperbel (mit den Achsen $2a$ und $2b$) unter einem rechten Winkel gesehen werden, haben alle denselben Abstand vom Centrum $\frac{ab}{\sqrt{a^2 \pm b^2}}$ (+ für Ell. — für Hyp.). — Ist nämlich die Sehne diejenige, deren Hälfte wir in 153. durch $MX = y$ bezeichnet haben, so wird $x = y$, und der Abstand wird dann, indem die Sehne mit dem halbirenden Durchmesser den Winkel α bildet,

$$x \sin\alpha = \frac{a'b' \sin\alpha}{\sqrt{a'^2 \pm b'^2}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \pm b^2}}$$

(148. und 149.).

Uebungsaufgaben.

Die gegebenen Kegelschnitte mögen hier, wie im Vorhergehenden, durch die Brennpunkte und die Länge der Brennpunktsachse bestimmt sein. Es wird aber auch nützlich sein zu untersuchen, welche Erleichterungen man haben wird, wenn es erlaubt ist eine gegebene Curve als genau gezeichnet zu benutzen.

1) In einer gegebenen Richtung eine Gerade zu ziehen, auf welcher eine gegebene Ellipse oder Hyperbel eine Sehne von gegebener Länge bestimmt.

2) An eine gegebene Hyperbel eine Tangente so zu legen, dass ihre Schnittpunkte mit den Asymptoten eine Strecke von gegebener Länge begrenzen.

3) Die Lagen zweier Paare von conjugirten Durchmessern sind gegeben. Durch einen gegebenen Punkt eine Sehne so zu legen, dass dieser Punkt ihr Mittelpunkt wird.

4) Ein Paar conjugirter Durchmesser eines gegebenen Kegelschnittes zu finden, welche auf einer gegebenen Tangente eine Strecke von gegebener Länge begrenzen.

5) Ein Paar conjugirter Durchmesser eines gegebenen Kegelschnittes zu bestimmen, welche einen gegebenen Winkel bilden.

6) Einer gegebenen Ellipse ein Parallelogram umzuschreiben von gegebenem Areal und mit gegebener Lage der einen Seite. Welcher ist der kleinste Werth, den dieses Areal haben kann?

7) Zu beweisen, dass der Ort der Mittelpunkte der Sehnen einer Ellipse, welche — wenn nöthig verlängert — durch einen festen Punkt gehen, eine ähnliche und ähnlich gelegene Ellipse ist, von welcher das Centrum der gegebenen Curve und der gegebene Punkt die Endpunkte eines Durchmessers sind. Bleibt dieser Satz ganz unverändert, wenn man die Ellipse durch eine Hyperbel ersetzt? Wie wird er lauten, wenn man sie durch ein Paar von Geraden ersetzt?

8) An eine gegebene Ellipse oder Hyperbel eine Tangente zu legen, deren Schnittpunkte mit einem andern gegebenen, mit dem ersten concentrischen Kegelschnitt, eine Strecke begrenzen, welche vom Centrum unter einem rechten Winkel gesehen wird.

2) Parabel.

158. Der Ort der Mittelpunkte M einer Reihe von parallelen Sehnen XY einer Parabel ist der Durchmesser (132), welcher durch den Berührungspunkt der mit den Sehnen parallelen Tangente geht; derselbe Durchmesser ist Ort der Schnittpunkte P der Tangenten in den zusammengehörigen Sehnenendpunkten X und Y. — Beweis: Wenn T und U die Projectionen von X und Y auf die Leitlinie sind, so hat erstens M denselben Abstand von den Geraden TX und UY, und befindet sich also auf der Mittelgeraden dieser Geraden; weiter sind T und U die symmetrischen Punkte des Brennpunktes F in Beziehung auf die beiden Tangenten PX

und PY, also ist $PT = PF = PU$ und P wird sich auf derselben Mittelgeraden befinden. Wegen 133. geht dieser noch durch den Berührungspunkt Z, und weil dieser Punkt und die mit der Achse parallele Richtung der Geraden PZM während der Bewegung der Sehne XY fest bleiben, so ist der Satz bewiesen — Die Achse gehört als Durchmesser den auf ihr senkrechten Sehnen.

159. Wenn man durch einen Punkt X einer Parabel eine willkürliche Sehne XY und die Tangente XP zieht, und wenn der Durchmesser durch den Mittelpunkt M der Sehne die Curve in Z und die Tangente in P trifft, so ist $PZ = ZM$. — Ist nämlich S der Schnittpunkt der Tangente XP mit der Tangente in Z, so muss S auf dem Durchmesser, welcher XZ halbirt, liegen (158). Weil $ZS \parallel MX$ ist, so erhält man dann $ZS = \frac{1}{2} MX$ und $PZ = ZM$. — Der Satz 90. ist ein Specialfall des hier bewiesenen Satzes.

160. Wenn ein Durchmesser die Parabel in Z und eine willkürliche von ihm halbirte Sehne XY in M trifft, so ist das Viertel der Sehne XY das geometrische Mittel der Strecke ZM und des Brennstrahles $FZ = f$ an Z. — Bezeichnen wir nämlich durch S und T die Schnittpunkte der Tangente in Z mit den Tangenten XP und YP in X und Y, so geht ein Kreis durch S, T, P und F (76). Wenn F' der zweite Schnittpunkt dieses Kreises mit PZ ist, hat man (64) $ZF' = ZF$. Man findet also (159)

$$(\tfrac{1}{4} XY)^2 = ZS^2 = - ZS \cdot ZT = - ZP \,.\, ZF' = ZM \cdot FZ.$$

Nennen wir die halbe Sehne $MX = \frac{1}{2} YX$ (die Ordinate) y und die Strecke ZM (die Abscisse) x, die positiv gerechnet wird, wenn M auf der concaven Seite der Parabel liegt, so kann dieses Resultat geschrieben werden

$$y^2 = 4fx.$$

Der umgekehrte Satz wird auf die gewöhnliche Weise bewiesen (vergl. 153.).

161. Bezeichnen wir durch α und β die Winkel, welche zwei Reihen von parallelen Sehnen einer Parabel mit den Durchmessern bilden, und durch f den Brennstrahl an den Endpunkt Z des Durchmessers, welcher die Sehnen der ersten Reihe halbirt; dann wird die Strecke s, welche die beiden Durchmesser auf einer durch den ersten Durchmesser halbirten Sehne abschneiden, $\frac{2 \sin (\alpha - \beta)}{\sin \beta} f$. — Mit den Bezeichnungen von 160. ist nämlich, indem wir ZX als eine Sehne der durch β bestimmten Reihe betrachten

$$s = ZS = \tfrac{1}{2} y$$

und

$$\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \beta} = \frac{x}{y} = \frac{y}{4f} = \frac{s}{2f}.$$

Ist der Durchmesser durch Z die Achse, so wird $\alpha = \frac{\pi}{2}$, also $s = 2 \cot \beta \cdot f = \frac{p}{2} \cot \beta$.

Der gefundene Satz lässt sich auch umgekehrt dazu benutzen, das durch β bestimmte zweite Sehnensystem zu finden, wenn sein halbirender Durchmesser, also s, bekannt ist. $\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \beta}$ ist nämlich das Verhältniss der Strecken, welche eine Sehne des unbekannten Systems (β) auf einem Durchmesser und einer Sehne des bekannten Systems, vom Schnittpunkte dieser Geraden gerechnet, abschneiden.

Der gefundene Ausdruck konnte auch zur Bestimmung von f dienen. Diese Grösse bleibt für eine feste Parabel constant, wenn der Durchmesser, welcher die durch α bestimmten Sehnen halbirt, gegeben ist. Dann bleibt also auch $\frac{s \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}$ constant, wo s mit Vorzeichen zu rechnen ist. Man kann dadurch, wenn die Durchmesser zweier Reihen von parallelen Sehnen einer Parabel gegeben sind, den Durchmesser jeder andern solchen Reihe bestimmen, also auch die Achse, und auch umgekehrt die Richtung der von einem gegebenen Durchmesser halbirten Sehnen.

Dies giebt folgende neue Auflösung der in 106. inbegriffenen Aufgabe: eine Parabel mit gegebener Achsenrichtung durch drei gegebene Punkte zu legen. Mittelst der Durchmesser, welche zwei der verbindenden Sehnen halbiren, bestimmt man die Achse und die Tangente in einem gegebenen Punkt. Die Lage des Brennstrahles an diesen Punkt (übrigens auch seine Länge) ist durch diese Tangente bestimmt (64).

Uebungsaufgaben.

Gegebene Parabeln mögen wie bisher durch den Brennpunkt und die Leitlinie bestimmt sein. Man beachte auch die Vereinfachungen welche eintreten, wenn eine Parabel genau gezeichnet vorliegt.

1) Die Aufgaben 1. und 7. (Seite 49) für die Parabel zu lösen.

2) Durch einen gegebenen Punkt einer gegebenen Parabel eine Sehne so zu legen, dass die von den Schnittpunkten mit der Curve und mit der Sehne begrenzte Strecke des die Sehne halbirenden Durchmessers eine gegebene Grösse hat.

3) Durch zwei gegebene Punkte eine Parabel so zu legen, dass die von einem gegebenen Durchmesser halbirten Sehnen eine gegebene Richtung haben.

4) Zu beweisen, dass der Ort der Sehnen einer Parabel, deren Projectionen auf eine auf der Achse senkrechte Gerade eine constante Grösse haben, eine mit der gegebenen congruente, in der Richtung der Achse verschobene Parabel ist.

5) Den Ort der Punkte der Durchmesser einer Parabel, welche von den Schnittpunkten der Durchmesser mit der Curve denselben Abstand haben wie ihre Schnittpunkte mit einer festen Geraden, zu finden.

VII. Asymptoteneigenschaften der Hyperbel; die gleichseitige Hyperbel.

Hier führen wir nur solche Eigenschaften der Asymptoten an, die sich nicht schon in Verbindung mit der Lehre von den Tangenten oder Durchmesser oder anderswo dargeboten haben. Während wir früher die Ellipse und Hyperbel möglichst übereinstimmend behandelt haben — und selbst dazu haben die der Hyperbel eigenthümlichen Asymptoten uns Dienste geleistet durch die Versinnlichung der Längen der nicht schneidenden Durchmesser — suchen wir hier dieses Hilfsmittel zur speciellen Behandlung der Hyperbel zu verwerthen. Ihm gegenüber werden wir dann im Folgenden ein ganz verschiedenes aufstellen, das in fast denselben Aufgaben über die Ellipse denselben Vortheil gewährt.

162. Das Areal eines Parallelogramms, dessen zwei Seiten in den Asymptoten liegen, während die dem Centrum entgegengesetzte Ecke sich auf der Hyperbel bewegt, bleibt constant; sein Werth ist $\frac{1}{2}ab$, indem $2a$ und $2b$ die Achsenlängen sind. Nennen wir die Seiten des Parallelogramms x und y, die Excentricität ε, so wird

$$xy = \tfrac{1}{4}\varepsilon^2 a^2.$$

Der Satz folgt aus 84. (wieder bewiesen in 149.), indem das Parallelogramm die Hälfte des von den Asymptoten und einer Tangente begrenzten Dreieckes ist (146). — Mehr direct konnte man ihn aus 147. folgern (und ihn nachher zu einem dritten Beweise von 84. benutzen). Sind nämlich X und X' zwei Punkte der Hyperbel, ferner x, y und x', y' die ihnen zugehörigen Parallelogramm-

seiten, sind weiter S und T die Schnittpunkte der Geraden XX' mit den Asymptoten, so hat man

$$\frac{x}{x'} = \frac{SX}{SX'} = \frac{X'T}{XT} = \frac{y'}{y}$$

also $xy = x'y'$.

Wenn umgekehrt X die bewegliche Ecke eines Parallelogramms mit festen Lagen von zwei Seiten und mit gegebenem Areale ist, und wenn wir noch wissen, in welchem Paare von Scheitelwinkeln der festen Geraden das Parallelogramm liegen soll, so wird der Ort von X eine Hyperbel mit den Asymptoten in den festen Geraden sein. Die Brennpunkte der Hyperbel, welche wirklich die gegebene Eigenschaft hat, lassen sich nämlich eindeutig bestimmen.

163. Das Product der Strecken SX und TX, welche auf einer Reihe von parallelen Geraden von den Schnittpunkten S und T mit den Asymptoten und einem der Schnittpunkte X mit der Hyperbel begrenzt werden, bleibt constant. Folgt aus 162. Das constante Product hat den Werth $\pm a'^2$, wenn $2a'$ die Länge der mit den Geraden parallelen Durchmesser ist, und wenn man das obere oder untere Zeichen benutzt, je nachdem dieser Durchmesser die Curve schneidet oder nicht.

164. Das Product der Strecken $SX \cdot SX'$, welche auf einer Reihe paralleler Geraden vom Schnittpunkte S mit der einen Asymptote und von den Schnittpunkten X und X' mit der Hyperbel begrenzt werden, bleibt constant (163).

165. Die Schnittpunkte einer Geraden mit den Asymptoten einer Hyperbel sind harmonisch verbunden in Beziehung auf die Schnittpunkte mit zwei willkürlichen conjugirten Durchmessern. — Dass dieser Satz von einer Tangente gilt, folgt aus 143. Dass er dann von jeder Geraden gelten muss, folgt aus dem Hilfssatze 125.

166. Aufgaben: Die Asymptoten und ein Punkt E einer Hyperbel sind gegeben; ohne die Achsen und die Brennpunkte zu bestimmen, sollen construirt werden: 1) Punkte der Curven, 2) Tangenten der Curve, 3) Schnittpunkte mit einer willkürlichen gegebenen Geraden, 4) Tangenten von einer gegebenen Richtung, 5) Tangenten durch einen gegebenen Punkt.

Auflösungen: 1) Mittelst 147. wird der Punkt X bestimmt, wo eine willkürliche Gerade durch E die Curve zum zweiten Male trifft. 2) Die Tangente in X ist die Gerade, auf welcher X der Mittelpunkt der von den Asymptoten begrenzten Strecke ist. 3) Die dritte Aufgabe wird mittelst 163. auf die bekannte zurückgeführt:

zwei Strecken zu bestimmen, deren Product und algebraische Summe (Summe oder Differenz) bekannt ist (eine Gleichung zweiten Grades graphisch aufzulösen). Die vierte und fünfte werden mittelst 84. auf diejenige zurückgeführt: in einer gegebenen Richtung oder durch einen gegebenen Punkt eine Gerade zu ziehen, welche mit den Asymptoten ein Dreieck von gegebenem Areale bilden. Auch zur letzten dieser Aufgaben hat man elementare Auflösungen.[1]) Statt eine solche hier zu reproduciren bemerken wir, dass man umgekehrt eine Auflösung dieser bekannten Appollonischen Aufgabe haben wird, wenn man die jetzige Aufgabe durch Bestimmung der Brennpunkte (150) löst.

Die Fälle wo statt E eine Tangente gegeben ist, oder wo die Lagen und Längen zweier conjugirten Durchmesser gegeben sind (150), lassen sich leicht auf den hier behandelten zurückführen. Dieselben Aufgaben lassen sich also auch dann ohne Bestimmung der Brennpunkte lösen.

167. Eine Hyperbel, deren Asymptoten einen rechten Winkel bilden, wird gleichseitig genannt. Die Längen zweier conjugirten Durchmesser, also speciell die Längen ihrer Achsen, sind einander gleich. Ihre Excentricität ist $\sqrt{2}$. Die Asymptoten einer gleichseitigen Hyperbel halbiren die Winkel zweier conjugirten Durchmesser. Ein Paar conjugirter Durchmesser bilden also mit einem anderen Paare gleiche Winkel in entgegengesetzten Umlaufsinnen. Wegen 135. haben Paare supplementarer Sehnen dieselben Eigenschaften.

168. Der Ort der Schnittpunkte der Geraden durch zwei feste Punkte D und E, welche mit zwei festen Geraden gleiche Winkel in entgegengesetzten Umlaufssinnen bilden, ist eine gleichseitige Hyperbel, von welcher D und E die Endpunkte eines Durchmessers sind, und deren Asymptoten mit den Halbirungslinien der Winkel der festen Geraden parallel sind (167).

Dieser Satz findet eine Anwendung zu einer Trisection des Winkels, bei welcher man ausser Kreis und Gerade nur eine gleichseitige Hyperbel benutzt (Chasles). AB sei ein Kreisbogen mit Centrum in C, AC das Drittel dieses Bogens. BT sei die Tangente des Kreises in B. Dann ist $\sphericalangle TBC = \sphericalangle COA$. Der unbekannte Punkt C liegt also auf einer gleichseitigen Hyperbel.

---

1) Siehe z. B. die Aufgabe 366 der „Methoden und Theorien zur Auflösung geometrischer Constructionsaufgaben" von Julius Petersen.

169. Wir werden hier noch einen Satz, den wir dann bald bis auf alle Durchmesser von allen Hyperbeln erweitern werden, von den Achsen der gleichseitigen Hyperbel beweisen. Die Länge a der Halbachsen einer gleichseitigen Hyperbel ist das geometrische Mittel der Strecken vom Centrum bis an die Schnittpunkte einer Achse mit einer auf die Achse senkrechten Sehne und mit den Tangenten in den Endpunkten dieser Sehne; nur sind diese Strecken mit verschiedenen Vorzeichen zu rechnen, wenn die Achse die zweite (nicht schneidende) ist. — Um dieses zu beweisen, betrachten wir das von einer Tangente GG_1 und den Asymptoten gebildete rechtwinklige Dreieck OGG_1. Eine Achse ist eine Halbirungslinie eines der von OG und OG_1 gebildeten Winkel. Ist P der Schnittpunkt dieser Geraden mit GG_1, und M die Projection des Berührungspunktes X auf derselben Geraden, so ist zu beweisen, dass $OM \cdot OP = \pm a^2$ ist. Man erhält dieses, wenn man auf derselben Geraden einen Punkt N so bestimmt, dass $MN = OM$ wird. Dann werden O, G, G_1 und N auf einer Kreisperipherie liegen, und man sieht dadurch, dass $\triangle\, OGP \sim \triangle\, ONG_1$, was die zu beweisende Relation giebt, indem $OG \cdot OG_1 = 2a^2$ ist (84). — Der gefundene Satz stimmt mit einem bekannten Kreissatze überein.

Uebungsaufgaben.

1) Durch drei gegebene Punkte eine Hyperbel mit einer gegebenen Asymptote zu legen.

2) Durch zwei gegebene Punkte eine Hyperbel zu legen mit einer gegebenen Asymptote und einer, mit der Verbindungsgeraden der Punkte parallelen, Tangente.

3) Eine Hyperbel mit gegebenem Centrum, einer gegebenen Asymptotenrichtung und zwei gegebenen Tangenten zu construiren.

4) Zwei conjugirte Durchmesser einer gegebenen Hyperbel zu finden, deren Längen ein gegebenes Verhältniss haben.

5) Durch die vier Ecken eines Paralleltrapezes eine gleichseitige Hyperbel zu legen.

VIII. Eine geometrische Transformation; Anwendung auf die Ellipse.

170. Auf die Sätze 153. und 160. gründet sich eine Verbindung unter Kegelschnitten mit einem gemeinschaftlichen Durchmesser, welche z. B. dazu dienen wird Constructionsaufgaben, die

eine Ellipse angehen, durch die einfacheren Aufgaben zu ersetzen, die einen Kreis angehen. Dies wird durch die nun zu beschreibende Transformation erreicht.[1])

Eine Gerade, die Transformationsachse, und drei feste Punkte A, a, A', von welchen a auf der Transformationsachse liegt, seien gegeben. Wir nennen die Geraden aA und aA' die Transformationsgeraden und bezeichnen durch α und α' die Winkel, welche sie mit der Transformationsachse bilden. Wenn nun X ein willkürlicher Punkt der Ebene ist, wird ein entsprechender Punkt X' folgenderweise construirt. Man ziehe $Xx \parallel Aa$, und durch ihren Schnittpunkt x mit der Transformationsachse $xX' \parallel aA'$; dann ist X' der durch die Proportion

$$xX' : xX = aA' : aA$$

bestimmte Punkt von der Gerade xX'. Wenn wir die Strecken mit Vorzeichen rechnen, und parallelen Linien denselben positiven Sinn beilegen, ist X' wirklich auf diese Weise eindeutig durch X' bestimmt, und umgekehrt. Wenn A, a und A' nicht in einer Geraden liegen, kann man die Proportion durch die Forderung ersetzen, dass $XX' \parallel AA'$.

Durch Anwendung dieser Transformation auf alle Punkte einer Figur erhält man eine neue Figur, welche in der durch die folgenden Sätze ausgedrückten Verbindung mit der gegebenen steht:

1) Punkte der Transformationsachse entsprechen sich selbst.

2) Die Abstände entsprechender Punkte X und X' von der Transformationsachse verhalten sich wie $aA \sin\alpha : aA' \sin\alpha'$.

3) Den Punkten X einer mit der Transformationsachse parallelen Geraden entsprechen Punkte X' einer anderen mit der Transformationsachse parallelen Geraden.

4) Entsprechende Strecken dieser Geraden sind einander gleich.

5) Den Punkten X einer Geraden, welche die Transformationsachse in einem Punkte P schneidet, entsprechen Punkte X' einer andern durch P gehenden Geraden.

6) Entsprechende Strecken dieser zwei entsprechenden Geraden sind einander proportionel.

7) Parallelen Geraden entsprechen parallele Geraden.

8) Areale, die sich entsprechen, verhalten sich wie

$$aA \sin\alpha : aA' \sin\alpha'.$$

---

1) Wie diese Transformation sich auch stereometrisch darbietet, werden wir in 193. sehen.

Dies lässt sich erstens von zwei Paralleltrapezen $xyYX$ und $xyY'X'$ beweisen; entsprechende Vielecke können entsprechender Weise durch Addition und Subtraction von solchen Trapezen zusammengesetzt werden, und Areale, welche ganz oder theilweise von krummen Linien begrenzt sind, können als Grenzformen in- oder umgeschriebener Vielecke betrachtet werden.

9) Den Punkten X einer Ellipse oder Hyperbel, von welcher die Transformationsachse ein Durchmesser ist, während der conjugirte Durchmesser mit der Transformationsgeraden aA parallel ist, entsprechen Punkte X' einer concentrischen Ellipse oder Hyperbel mit ganz demselben erst genannten Durchmesser (das heisst mit denselben Endpunkten dieses Durchmessers, wenn er die erste Curve schneidet, sonst mit derselben Lage und derselben Länge), während der conjugirte Durchmesser der andern Transformationsgeraden aA' parallel ist, und die Curve schneidet oder nicht, je nachdem der entsprechende mit aA parallele Durchmesser die ursprüngliche Curve schneidet oder nicht, und sich endlich zu diesem wie aA' zu aA verhält. — Dies folgt aus dem directen und umgekehrten Satze 153., woraus man auch schliessen kann, dass zwei auf die beschriebene Weise gelegene Kegelschnitte immer in einander transformirt werden können. 10 und 11 werden in ähnlicher Weise umkehrbar sein.

10) Den Punkten einer Parabel, von welcher die Transformationsachse ein Durchmesser ist, während die von ihm halbirten Sehnen mit der Transformationsgeraden aA parallel sind, entsprechen die Punkte einer neuen Parabel mit ganz demselben Durchmesser, welcher hier die mit aA' parallelen Sehnen halbirt (160).

11) Den Punkten X einer Hyperbel, deren eine Asymptote mit der Transformationsachse zusammenfällt, während die andere mit der Transformationsgeraden aA parallel ist, entsprechen die Punkte X' einer mit der ersten concentrischen Hyperbel, deren eine Asymptote mit der Transformationsache zusammenfällt, während die andere mit aA' parallel ist (162).

12) Einem Schnittpunkte oder Berührungspunkte zweier der im Vorhergehenden besprochenen Linien, wird ein Schnittpunkt, resp. Berührungspunkt, der entsprechenden Linien entsprechen.

13) Den Asymptoten einer Hyperbel werden die Asymptoten der entsprechenden Hyperbel (9 und 11) entsprechen. Folgt aus 7.

14) Dem Durchmesser eines Kegelschnittes, welcher die Sehnen einer gegebenen Reihe halbirt, entspricht der Durchmesser des entsprechenden Kegelschnittes (9—11), welcher die ensprechenden Sehnen halbirt (6 und 7).

171. Wenn zwei Kegelschnitte einen Durchmesser ganz gemein haben (170, 9 und 10), so werden ihre vier Tangenten in den Endpunkten zweier Sehnen, die denselben auf dem Durchmesser gelegenen Mittelpunkt haben, alle den Durchmesser in demselben Punkte treffen. (170, 12).

172. Das Product der Strecken $OM \cdot OP$ vom Centrum O eines Kegelschnittes an die Schnittpunkte M und P eines Durchmessers mit einer von ihm halbirten Sehne und mit den Tangenten in den Endpunkten dieser Sehnen ist $\pm a'^2$ gleich, wenn a' die Länge des Halbmessers ist, und man das obere oder untere Zeichen braucht, je nachdem der Durchmesser die Curve schneidet oder nicht. — Wenn man den Durchmesser als Achse eines Kreises oder einer gleichseitigen Hyperbel benutzt, kann man wegen 171. diesen Satz aus 169. und dem analogen Kreissatze folgern.

173. Aufgaben: Die Lagen und Grössen zweier conjugirten Durchmesser einer Ellipse sind gegeben; ohne die Achsen und Brennpunkte zu bestimmen, sollen construirt werden: 1) Punkte der Curve, 2) Tangenten der Curven, 3) die Schnittpunkte einer gegebenen Geraden, 4) die Tangenten von einem gegebenen Punkte.

Auflösungen: Wir construiren einen Kreis über einen der gegebenen Durchmesser. Dieser wird der gesuchten Ellipse auf der in 170, 9 beschriebenen Weise entsprechen. Der gemeinschaftliche Durchmesser wird die Transformationsachse sein, und als Transformationsgeraden kann man die ihnen conjugirten Halbmesser benutzen. Man erhält dann beliebig viele Punkte der Ellipse, indem man diejenigen Punkte construirt, die gegebenen Punkten des Kreises entsprechen. Die Tangenten in diesen Punkten werden mittelst 171. bestimmt. Um die dritte und vierte Aufgabe zu lösen, braucht man nur die Gerade und den Punkt zu construiren, welche in der Figur des Kreises der gegebenen Geraden und dem gegebenen Punkte in der Figur der Ellipse entsprechen. Die entsprechende Gerade erhält man dadurch, dass man ihren Schnittpunkt mit der Transformationsachse kennt (170, 5) und leicht noch einen andern ihrer Punkte construiren kann.

Wir bemerken, dass dieselbe Transformation noch einen neuen Beweis von 149. giebt, insofern dieser Satz die Ellipse betrifft (170, 8).

Uebungsaufgaben.

1) Die Lagen und die Längen zweier conjugirten Durchmesser einer Ellipse sind gegeben; durch einen gegebenen Punkt

eine Sehne zu legen, die vom gegebenen Punkte in einem gegebenen Verhältnisse getheilt wird.

2) Von einem Kegelschnitte ist das Centrum, eine Tangente mit ihrem Berührungspunkte und noch ein Punkt P bekannt; wie kann man den Durchmesser, welcher dem durch P gehenden Durchmesser conjugirt ist, am leichtesten bestimmen?

3) Eine Ellipse zu construiren, wenn zwei ihrer Punkte; das Centrum und das geometrische Mittel ihrer Achsen gegeben sind.

4) Dieselbe Aufgabe für eine Hyperbel zu lösen.

5) In einer gegebenen Ellipse zwei conjugirte Halbmesser zu finden, deren Projectionen auf eine Achse der Ellipse ein gegebenes Verhältniss haben.

6) Das Verhältniss der Projection eines Halbmessers einer Ellipse auf die eine Achse zur Projection des conjugirten Halbmessers auf die andere Achse zu finden.

IX. Beispiele von Combinationen zweier Kegelschnitte.[1])

174. Aufgabe: Die Schnittpunkte zweier Kegelschnitte, deren gemeinschaftlicher Durchmesser parallele Sehnen halbirt, zu construiren.

Auflösung: Setzen wir erstens voraus, dass der gemeinschaftliche Durchmesser oder wenn die Kegelschnitte concentrisch sind, derjenige der unendlich vielen gemeinschaftlichen Durchmesser, welcher die gegebene Eigenschaft hat, jeden Kegelschnitt in zwei Punkten $Z_1 Z$ und $T_1 T$ schneidet. Wegen 153. wird das Quadrat der Hälfte MX einer vom Durchmesser halbirten gemeinschaftlichen Sehne gegebene Verhältnisse haben zu den Potenzen $MZ \cdot MZ_1$ und $MT \cdot MT_1$ ihres Mittelpunktes M in Beziehung auf willkürliche Kreise durch Z_1 und Z und durch T_1 und T. Diese Potenzen haben also auch ein gegebenes Verhältniss. Dadurch werden höchstens zwei Punkte M bestimmt (10), also zwei Sehnen, die doch nur wirkliche Schnittpunkte geben, in so fern sie selbst die Curven schneiden.

Wenn die eine Curve eine Parabel ist, wird der eine Kreis durch die Senkrechte auf den Durchmesser in seinem Schnittpunkte mit der Parabel ersetzt (160).

---

1) Dieser am meisten zur Uebung bestimmte Abschnitt ist nicht nothwendig, um die folgenden Abschnitte zu verstehen.

Wenn ein gegebener Kegelschnitt die Curve nicht schneidet, muss man 153. ein wenig anders benutzen. Wenn wir in der dort in x und y geschriebenen Gleichung nicht y sondern x, die ja einer dem conjugirten Durchmesser gehörigen Halbsehne gleich ist, durch MX ersetzen und $y = OX$ setzen, indem O das Centrum ist, und weiter die Namen a' und b' vertauschen, so wird die Hälfte MX einer vom Durchmesser halbirten Sehne bestimmt durch

$$MX^2 = \frac{b'^2}{a'^2}(OX^2 + a'^2).$$

Wenn man also im Centrum eine Senkrechte auf OX errichtet und sie gleich der Länge a' des durch M gehenden, die Curve nicht schneidenden, Halbmessers macht, so wird MX^2 ein constantes Verhältniss haben zum Quadrate des Abstandes von M an den Endpunkt E dieser Senkrechten, oder zur Potenz von M in Beziehung auf den Kreis mit Centrum in E und mit dem Halbmesser Null. Die Auflösung lässt sich dann immer mittelst 10. vollführen.

175. Aufgabe: Die gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kegelschnitte, deren gemeinschaftlicher Durchmesser parallele Sehnen halbirt, zu construiren.

Auflösung: Setzen wir auch hier erstens voraus, dass der gemeinschaftliche Durchmesser den einen Kegelschnitt in Z_1 und Z, den anderen in T_1 und T schneidet. Wenn eine gesuchte Tangente den Durchmesser in P trifft, so wird (142) das Verhältniss $\frac{PZ \,.\, PZ_1}{PT \,.\, PT_1}$ dem Verhältnisse der Quadrate der dem gemeinschaftlichen Durchmesser conjugirten Durchmesser mit dem Zeichen $+$ oder $\div$, je nachdem die respective Curve eine Ellipse oder Hyperbel ist, gleich sein. P wird dann wie M in der vorigen Aufgabe bestimmt. Höchstens vier Auflösungen.

Ist die eine Curve, z. B. die erste, eine Parabel, so wird man auch hier einen bekannten Werth von $\frac{PZ}{PT \,.\, PT_1}$ aus 159. und 160. herleiten können.

Wenn die eine Curve, z. B. die erste, den Durchmesser nicht schneidet, kann man das Product $PZ \,.\, PZ_1$ durch PE^2 ersetzen, wo der Punkt E derselbe ist, den wir in 174. brauchten. Bezeichnen wir nämlich durch Q den Schnittpunkt der gesuchten Tangente mit einer mit dem gegebenen Durchmesser parallelen Tangente, und durch R den Schnittpunkt dieses Durchmessers mit einer mit dem conjugirten Durchmesser parallelen Geraden durch Q, so ist, wegen 142., $PR^2 = PO^2 + a'^2 = PE^2$. Also wird hier

$\frac{PE^2}{b'^2} = \frac{PR^2}{RQ^2}$ dieselbe Bedeutung haben wie $\frac{PZ.PZ_1}{b'^2}$ im ersten Falle, wo der Durchmesser die Curve schnitt.

176. Aufgaben: Die Schnittpunkte und die gemeinschaftlichen Tangenten eines Kegelschnittes mit einem concentrischen Kreise zu bestimmen. — **Auflösung:** Die eine dieser Aufgaben lässt sich auf die andere reduciren; denn das Product der Länge eines Halbmessers mit dem Abstande des Centrums von der Tangente im Endpunkte des conjugirten Durchmessers ist constant (149). Es genügt also die eine aufzulösen. Die Tangente, welche vom Centrum einen gegebenen Abstand hat, wird dadurch bestimmt[1]), dass dieser Abstand die Hälfte sein muss der auf die Tangente senkrechten Sehne des Kreises über die Brennpunktsachse als Durchmesser, welche durch einen Brennpunkt geht.

177. Aufgabe: Die Schnittpunkte zweier concentrischen Kegelschnitte zu bestimmen. — **Auflösung:** Wenn der eine Kegelschnitt eine Ellipse ist, kann man mittelst der im vorigen Abschnitte beschriebenen Transformation die Aufgabe durch eine ähnliche ersetzen, wo ein Kreis an die Stelle der Ellipse tritt. Wenn beide Kegelschnitte Hyperbeln sind, kann man die durch die Schnittpunkte gehenden Durchmesser dadurch bestimmen, dass sie eine gegebene Gerade in solchen Punkten schneiden müssen, deren Abstandsprodukte von den Schnittpunkten der Geraden mit den Asymptoten ein gegebenes Verhältniss haben (163). Die Aufgabe wird also mittelst (10) gelöst. Sie hat in den beiden betrachteten Fällen höchstens 4 Auflösungen.

178. Aufgabe: Die gemeinschaftlichen conjugirten Durchmesser zweier concentrischen Kegelschnitte zu bestimmen. — **Auflösung:** Wenn alle vier Schnittpunkte reell sind, bestimmen die Mittelpunkte der gemeinschaftlichen Sehnen die gesuchten Durchmesser. Sonst kann man, wenn die Curve eine Ellipse ist, durch die Transformation die Aufgabe in eine solche ändern, wo die Ellipse durch einen Kreis ersetzt ist, und wo man also die Achsen suchen muss des transformirten anderen Kegelschnittes. Wenn beide Curven Hyperbeln sind, giebt der Satz 165, dass die gesuchten conjugirten Durchmesser Asymptoten sind der Kegelschnitte, wo die Asymptoten der gegebenen Kegelschnitte conjugirte Durchmesser sind. Die Aufgabe wird also wie 155 gelöst; sie wird in diesem letzten Falle unmöglich, wenn die Asymptotenpaare sich trennen. Sonst findet man immer ein gemeinschaftliches Paar conjugirter Durchmesser.

---

1) Diese Aufgabe ist schon früher zur Uebung gestellt (Seite 24).

Wenn man so die Aufgabe unabhängig von 177 löst, kann man die Auflösung benutzen um 177 auf 174 zu reduciren.

179. Aufgabe: Die gemeinschaftlichen Tangenten zweier concentrischen Kegelschnitte zu construiren.[1] — **Auflösung:** Die Aufgabe reducirt sich mittelst 178 auf 175. Wenn der eine Kegelschnitt eine Ellipse ist, kann man auch die Transformation benutzen. Wenn sie beide Hyperbeln sind, reducirt sie sich darauf: eine Gerade zu ziehen, welche zusammen mit zwei Paaren von gegebenen Geraden Dreiecke von gegebenen Arealen begrenzen. Diese Aufgabe lässt sich dadurch lösen, dass man eine ähnliche Figur construirt, wo die Asymptoten Strecken von gegebener Länge auf einer gegebenen Geraden begrenzen.

180. Aufgaben: Die Schnittpunkte und die gemeinschaftlichen Tangenten zweier Parabeln mit parallelen Achsen zu construiren. — **Auflösung:** Die Parabeln sind ähnlich (116) und ähnlich gelegen. Die Berührungspunkte paralleler Tangenten werden entsprechende Punkte sein. Man kann dann leicht den Aehnlichkeitspunkt bestimmen. Der durch ihn gehende Durchmesser halbirt parallele Sehnen in den beiden Parabeln. Die Aufgaben sind also auf 174 und 175 reducirt.[2])

Wenn die Parabeln congruent sind und ihre Convexitäten denselben Sinn haben, werden diese Constructionen unbrauchbar. Die Richtung der einzigen gemeinschaftlichen Tangente ist aber bekannt, und der Durchmesser durch den Mittelpunkt ihrer Berührungspunkte geht durch den einzigen Schnittpunkt.

Uebungsaufgaben.

1) Zu beweisen, dass zwei ähnliche und ähnlich gelegene Ellipsen oder Hyperbeln in Beziehung auf zwei verschiedene Aehnlichkeitspunkte diese Eigenschaft haben. Ihre Schnittpunkte und gemeinschäftlichen Tangenten zu construiren.

2) Zwei von den Endpunkten einer Achse eines Kegelschnittes ausgehende supplementare Sehnen zu construiren, deren Längen ein gegebenes Verhältniss haben.

3) Durch einen gegebenen Kegelschnitt eine Sehne zu legen, welche vom Centrum unter einem rechten Winkel und von einem Brennpunkte unter einem gegebenen Winkel gesehen wird.

---

1) Die Aufgabe kann auch mittelst der Brennpunkte gelöst werden, und ist darum schon Seite 24 gestellt.

2) Die gemeinschaftlichen Tangenten lassen sich auch mittelst der Brennpunktseigenschaften bestimmen. (Siehe Aufgabe 4. Seite 24.)

4) Eine Gerade dreht sich um den Schnittpunkt zweier congruenten Parabeln, deren Achsen dieselbe Richtung und deren Convexitäten denselben Sinn haben. Zu beweisen, dass, wenn man die anderen Schnittpunkte dieser Geraden mit den Parabeln auf eine auf die Achsen senkrechte Gerade projicirt, so werden diese Projectionen einen constanten Abstand haben.

X. Arealbestimmungen.

181. Das Areal S des durch einen Ellipsenbogen und seine Sehne begrenzten Segmentes lässt sich mittelst der in 170 beschriebenen Transformation bestimmen, indem man den Durchmesser, welcher die Sehne halbirt als Transformationsachse braucht und dann das Segment in ein Kreissegment ändert (170, 9). Aus dem bekannten Ausdruck des Kreissegmentes findet man dann mittelst 170, 8, indem man die Länge des als Transformationsachse benutzten Durchmessers $2a'$, die Länge des conjugirten, mit der Sehne parallelen Durchmessers $2b'$, die von dem Centrum und dem Schnittpunkte mit der Sehne begrenzte Strecke des Durchmessers x und den Winkel der Durchmesser α nennt, und indem man weiter einen Winkel β durch $\cos\beta = \frac{x}{a'}$ bestimmt, dass

$$S = \tfrac{1}{2}\, a'b' \sin\alpha\, (2\beta - \sin 2\beta),$$

wobei jedoch zu bemerken ist, dass x positiv oder negativ gerechnet wird, je nachdem man das kleinere oder grössere der beiden durch dieselbe Sehne begrenzten Segmente betrachtet, und dass $0 \leqq \beta \leqq \pi$. Für $x = -a'$ hat man $\beta = \pi$. Das Areal der ganzen Ellipse ist also $\pi a'b' \sin\alpha = \pi ab$ (149).

182. Das Areal S des durch einen Parabelbogen XY und seine Sehne begrenzten Segmentes ist $\frac{4}{3}$ Mal das Areal des Dreiecks XYZ, wo Z der Schnittpunkt ist der Curve mit dem Durchmesser, welcher die Sehne halbirt. (Archimedes.) Bezeichnen wir durch α den Winkel des Durchmessers und der Sehne und durch $2y$ und x die Längen der Sehne und der von der Curve und der Sehne begrenzten Strecke des Durchmessers, so ist $S = \frac{4}{3}\, xy \sin\alpha$.

Um diesen Satz zu beweisen, nennen wir das Segment S und das Dreieck T. Weil T in S vollständig enthalten ist, und S ebenso in dem Parallelogramm $2T$, welches die Sehne XY, die damit parallele Tangente und die durch X und Y gehenden Parallelen mit der Achse begrenzen, so hat man

$$2T > S > T, \text{ oder } S = T + R, \text{ wo } R < T.$$

Der Ueberrest R besteht aus den durch die Sehnen ZX und ZY abgeschnittenen Segmenten, und auf jedes von diesen kann man dieselbe Betrachtung anwenden. Bezeichnen wir durch T_1 die Summe der in ihnen ganz wie T in S eingeschriebenen Dreiecke, so ist

$$R = T_1 + R_1, \text{ wo } R_1 < T_1.$$

Aus 159 findet man weiter, dass $T_1 = \frac{1}{4} T$, also

$$R = \frac{1}{4} T + R_1 \text{ wo } R_1 < \frac{1}{4} T.$$

Ganz ebenso hat man

$$R_1 = \frac{1}{4} T_1 + R_2 = \frac{1}{16} T + R_2, \text{ wo } R_2 < \frac{1}{16} T$$

u. s. w.

Durch successive Einsetzung findet man

$$S = T\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots \frac{1}{4^n}\right) + R_n, \text{ wo } R_n < \frac{1}{4^n} T.$$

Wenn n ins Unendliche wächst, verschwindet R_n, und durch Summation der unendlichen Quotientenreihe findet man dann $S = \frac{4}{3} T$.

183. Wenn vier mit einer Asymptote einer Hyperbel parallele Geraden die andere Asymptote in den Punkten x, y, x', y' und die Curve in den Punkten X, Y, X', Y' schneiden, und wenn $\frac{Ox}{Oy} = \frac{Ox'}{Oy'}$, wo O das Centrum ist, so sind die von den vier parallelen Geraden und den von ihnen begrenzten Strecken xy und $x'y'$ der Asymptote und den Bogen XY und $X'Y'$ der Hyperbel begrenzten Areale $xXYy$ und $x'X'Y'y'$ einander gleich.

Man beweist[1]) diesen Satz durch eine doppelte Anwendung der Transformation 170. Das erste Mal braucht man die Asymptote Ox als Transformationsachse, und die Transformation wird so bestimmt, dass der dem X entsprechende Punkt X'' im Schnittpunkte von xX mit der mit Ox parallelen Geraden durch X' fällt. Das zweite Mal braucht man die andere Asymptote als Transformationsachse und lässt den Punkt X' dem Punkte X'' entsprechen. Wegen 170, 11 wird jedesmal der gegebenen Hyperbel eine Hyperbel mit denselben Asymptoten entsprechen, und weil die durch die letzte Transformation gefundene Hyperbel durch den Punkt X' der ursprünglichen Hyperbel geht, wird sie mit dieser ganz zusammenfallen (166). Dem Areale $xXYy$ wird wegen der gegebenen Relation nach den beiden Transformationen das Areal $x'X'Y'y'$ entsprechen.

---

1) Diese Beweisführung hat mir Prof. Oppermann mündlich mitgetheilt.

Nennen wir nun ein willkürliches Areal in der ersten Figur A_1, das entsprechende in der zweiten A_2 und dasjenige in der durch beide Transformationen erhaltenen Figur A_3, so ist (170, 8)

$$A_1 : A_2 = xX : xX'' = xX : x'X'$$
$$A_2 : A_3 = \qquad Ox : Ox'.$$

Nun ist (162) $Ox \,.\, xX = Ox' \,.\, x'X'$; also wird $A_1 = A_3$.

184. Die in 183. genannten Areale $xXYy$ und $x'X'Y'y'$ werden sich im Falle, wo die Proportion $\frac{Ox}{Oy} = \frac{Ox'}{Oy'}$ nicht mehr Statt hat, verhalten wie die Logarithmen von $\frac{Oy}{Ox}$ und $\frac{Oy'}{Ox'}$, in einem willkürlichen Logarithmensysteme genommen.

Nehmen wir, um dieses zu beweisen, erstens an, dass die beiden Areale ein gemeinschaftliches Maass haben. Man kann sie dann in gleich grosse Parallelstreifen von derselben Art wie die gegebenen Areale getheilt denken.

Wegen 183. werden dann $\frac{Oy}{Ox}$ und $\frac{Oy'}{Ox'}$ in eben so viele gleich grosse Factoren aufgelöst, wie die respectiven Areale in Summanden, und daher auch $\log \frac{Oy}{Ox}$ und $\log \frac{Oy'}{Ox'}$ in ebenso viele gleichgrosse Summanden. In diesem Falle ist also der Satz bewiesen, und die Erweiterung zu dem Falle, wo die Areale kein gemeinschaftliches Maass haben, geschieht wie z. B. für den Satz über die Theilung der Seiten eines Dreiecks durch eine Paralleltransversale.

185. Ein wie in 183. und 184. begrenztes Areal $xXYy$ ist $k \,.\, ab \log \frac{Oy}{Ox}$ gleich, wo a und b die Längen der Halbachsen sind und k eine für alle Hyperbeln constante Grösse ist. — Dass k constant bleibt für alle einer einzigen Hyperbel gehörigen Areale der gegebenen Art, folgt aus 184. Dass es auch für zwei Hyperbeln dieselbe Grösse hat, folgt daraus, dass man, nachdem man ihnen gemeinschaftliches Centrum und eine gemeinschaftliche Asymptote gegeben hat, die eine in die andere transformieren kann mittelst 170, 11. Das constante Verhältniss der sich in den beiden Figuren entsprechenden Areale, muss nämlich dann demjenigen zweier von den Asymptoten und einer Tangente begrenzten Dreiecke, oder der Achsenproducte, gleich sein.

Der Werth der Constante k hängt von der Basis des gebrauchten Logarithmensystems ab. Umgekehrt kann man auch diese Basis so bestimmen, dass die Constante einen bestimmten Werth

bekommt. Suchen wir die Basis e, für welche $k = \frac{1}{2}$ wird, wozu es offenbar genügt eine gleichseitige Hyperbel zu betrachten. Dann zeigt eine Figur, dass (indem wir $Oy > Ox$ annehmen) $xy \, . \, xX > xXYy > xy \, . \, yY$, oder, wegen $Ox \, . \, xX = Oy \, . \, yY = \frac{1}{2} a^2$, (162),

$$\frac{1}{2} a^2 \frac{xy}{Ox} > \frac{1}{2} a^2 \log \frac{Oy}{Ox} > \frac{1}{2} a^2 \frac{xy}{Oy}.$$

Setzen wir hier

$$\frac{xy}{Ox} = \frac{1}{m} \text{ also } \frac{Oy}{Ox} = 1 + \frac{1}{m}, \quad \frac{xy}{Oy} = \frac{1}{m+1},$$

so erhalten wir

$$\frac{1}{m} > \log\left(1 + \frac{1}{m}\right) > \frac{1}{m+1}.$$

Daraus folgt, weil m positiv ist,

$$e^{\frac{1}{m}} > 1 + \frac{1}{m} > e^{\frac{1}{m+1}}$$

also

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < e < \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1},$$

wodurch man, indem die Gränzen bei wachsenden Werthen von m sich nähern, e mit beliebig grosser Genauigkeit berechnen kann. Man findet $e = 2{,}7182818\ldots$

Bezeichnet man also durch log die Logarithmen im System mit der Basis e (die sogenannten natürlichen Logarithmen), so ist das hier untersuchte Areal

$$xXYy = \frac{1}{2} ab \, . \, \log \frac{Oy}{Ox},$$

und wenn man mit Log die Logarithmen im gewöhnlichen (Briggsschen) System bezeichnet, findet man

$$xXYy = \frac{1}{2 \, . \, \text{Log}\, e} ab \cdot \text{Log} \frac{Oy}{Ox} = 1{,}1512925 \, . \, ab \, . \, \text{Log} \frac{Oy}{Ox}.$$

186. Das von einem Hyperbelbogen, zwei Parallelen mit der einen Asymptote und einer Strecke der anderen begrenzte Areal ist demjenigen gleich, das man durch Vertauschung der Asymptoten erhält. Folgt aus 185. und 162.

187. Das von einem Hyperbelbogen und seiner Sehne begrenzte Segment ist die Differenz eines Paralleltrapezes und des in 185. berechneten Areales. Indem wir nun Segmente aller Arten von Kegelschnitten berechnen können, sind wir auch im Stande das Areal jeder Figur zu berechnen, die von bekannten Geraden

und Kegelschnitten, welche sich in bekannten Punkten schneiden, begrenzt ist; denn eine solche kann durch Addition und Subtraction solcher Segmente und geradliniger Figuren zusammengesetzt werden.

Uebungsaufgaben.

1) Die Seiten eines gleichseitigen Dreieckes sind durch Parabelbogen ersetzt, deren Brennpunkte alle im Centrum des Dreieckes liegen; das Areal der von den drei Parabelbogen begrenzten Figur zu berechnen.

2) Die Seiten eines regulären Zwölfeckes sind von Bogen gleichseitiger Hyperbeln mit Centrum im Centrum des Vieleckes begrenzt; das Areal der von den zwölf Hyperbelbogen begrenzten Figur zu berechnen.

3) Den Ort der Sehnen einer Parabel, die Segmente von gegebener Grösse abschneiden, zu finden. (Siehe Aufgabe 4, Seite 52.)

4) Dieselbe Aufgabe für die Ellipse.

5) Den Ort der Sehnen XY einer Hyperbel zu finden, welche solche Bogen abschneiden, die mit Parallelen Xx und Yy mit der einen Asymptote und einer Strecke xy der anderen Areale constanter Grösse begrenzen.

6) Die Aufgabe 3 (4) für die Hyperbel zu lösen.

7) Durch einen gegebenen Punkt die Gerade zu ziehen, welche das möglichst kleine Segment aus einer Parabel, Ellipse oder Hyperbel abschneidet.

XI. Ebene Schnitte von Umdrehungskegeln.

188. Ein ebener Schnitt eines Umdrehungskegels ist, wenn er nicht durch den Scheitel geht, eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel mit den Brennpunkten F und F_1 in den Berührungspunkten der Ebene mit Kugeln, die dem Kegel eingeschrieben sind, und mit den zugehörigen Leitlinien in den Geraden, wo die Ebene die Ebenen der Berührungskreise des Kegels mit den Kugeln trifft. Je nachdem die Schnittebene mit keiner erzeugenden Geraden des Kegels, mit einer oder mit zwei solchen parallel ist, wird die Curve eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel. Im letzten Falle werden die Schnittcurven der Ebene mit den zwei Mänteln des Kegels die zwei Zweige der Hyperbel bilden.

Beweis. Figur 7 stellt einen, auf die Ebene (S), deren Schnitt-

curve zu bestimmen ist, senkrechten ebenen Schnitt durch die Achse des Kegels dar; A_1A ist die Spur und Projection der Ebene (S), TA und TA_1 sind die in der Figurebene enthaltenen Erzeugenden des Kegels. Die Figur stellt den Fall dar, wo der Schnitt eine Ellipse wird; die anzustellenden Betrachtungen werden aber auch den Fällen gelten, wo er eine Hyperbel oder — in so fern wir nur von einem Brennpunkte und der zugehörigen Leitlinie sprechen — eine Parabel wird. M bezeichnet die Projection eines willkürlichen Punktes X der gesuchten Curve auf die Figurebene. Durch diesen Punkt sei eine auf der Achse des Kegels senkrechte Ebene gelegt, welche die Erzeugende TA in R schneidet. Man findet dann, weil alle Tangenten von einem Punkt an eine Kugel einander gleich sind, und weil Ebenen senkrecht auf die Achse des Kegels gleiche Strecken der Erzeugenden begrenzen, dass $XF = RE$ und $XF_1 = RE_1$, wo E und E_1 die Berührungspunkte der Erzeugenden TA mit den Kugeln sind. Wenn nun X sich auf der gesuchten Curve bewegt, wird — je nachdem R sich auf der endlichen Strecke E_1E oder auf einer ihrer Verlängerungen befindet — die Summe oder die Differenz der absoluten (positiven) Werthe von FX und F_1X der constanten Grösse E_1E gleich. Die Curve ist also eine Ellipse oder Hyperbel mit den Brennpunkten F_1 und F und mit Scheiteln in den Schnittpunkten A_1 und A der Geraden F_1F mit dem Kegel.

Fig. 7.

Dass die Gerade, welche im Schnittpunkte G von A_1A mit der Berührungsehne DE senkrecht auf der Figurebene steht, die dem Brennpunkte F gehörige Leitlinie ist, folgt daraus dass

$$\frac{FX}{MG} = \frac{RE}{MG} = \frac{AE}{AG} = \text{const.}$$

Diese constante Grösse wird Eins, also die Curve eine Parabel, wenn $AE = AG$, das heisst, wenn $AG \parallel DT$.

Weder der Satz noch der Beweis wird sich ändern, wenn der Kegel mit einem Umdrehungscylinder (Kegel mit unendlich entferntem Scheitel) vertauscht wird; in diesem Falle wird man jedoch nur elliptische Schnitte erhalten.

189. Bezeichnen wir mit α den Winkel, welchen die Er-

zeugenden, und mit β denjenigen, welchen die Schnittebenen mit der Achse des Kegels bilden, so ist die Excentricität des Schnittes

$$\varepsilon = \frac{AE}{GA} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}.$$

Für einen gegebenen Kegel wird er also alle solche Werthe annehmen können, dass $0 \leqq \varepsilon \leqq \frac{1}{\cos\alpha}$.

190. Wenn die Curve eine Hyperbel ist, und θ den spitzen Winkel der Asymptoten mit der Brennpunktsachse bezeichnet, so ist

$$\cos\theta = \frac{1}{\varepsilon} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}.$$

Man könnte daraus mittelst sphärischer Trigonometrie folgern, dass die Asymptoten mit den Erzeugenden parallel sind, in welchen eine mit der Schnittebene parallele Ebene durch den Scheitel den Kegel schneidet. Dies wird unmittelbar daraus folgen, dass alle parallelen Ebenen den Kegel in ähnlichen Curven schneiden; die von zwei Geraden gebildete Grenzcurve muss auch denselben Asymptotenwinkel behalten; die zwei Geraden müssen also diesen Winkel bilden.

191. Wenn eine Ellipse und eine Hyperbel so in auf einander senkrechten Ebenen gelegen sind, dass die Brennpunkte der einen Curve die (auf der Brennpunktsachse gelegenen) Scheitel der andern sind, und umgekehrt, so ist jede dieser Curven der Ort der Scheitel der Umdrehungskegel, auf welchen die andere liegt.

Wenn nämlich (Fig. 7) F_1 und F die Brennpunkte und A_1 und A die Scheitel einer Ellipse sind, so wird der Scheitel T eines diesen Kegelschnitt enthaltenden Umdrehungskegels (188), erstens in der auf der Ebene des Kegelschnittes senkrechten Ebene durch $A_1 A$ liegen; man hat weiter

$$A_1 T - AT = A_1 D - AE = A_1 F - AF = F_1 F.$$

Der Beweis wird ganz auf dieselbe Weise geführt, wenn die gegebene Curve eine Hyperbel ist.

Die Asymptoten der Hyperbel werden Achsen der durch die Ellipse gehenden Umdrehungscylinder sein.

192. Wenn zwei Parabeln in zwei auf einander senkrechten Ebenen so gelegen sind, dass sie dieselbe Achse haben, und der Brennpunkt der einen der Scheitel der andern ist, und umgekehrt, so wird jede der Ort der Scheitel der die andern enthaltenden Umdrehungskegel sein. Dieser Satz ist ein Grenzfall vom vorigen; man kann aber auch leicht direct beweisen, dass in diesem Falle, wo

AF mit TD parallel ist, AT dem Abstande des Punktes T von der Leitlinie der Parabel mit dem Brennpunkte A und dem Scheitel F gleich ist.

Uebungsaufgaben.

1) Zu beweisen, dass, wenn zwei Kreise mit den Centren auf der Brennpunktsachse eines Kegelschnittes den Kegelschnitt zweimal berühren, entweder die Summe oder die Differenz der Tangenten von einem Punkte des Kegelschnittes an diese Kreise (bis zu den Berührungspunkten gerechnet) einen Werth hat, der für die ganze Curve constant bleibt.

2) Durch geometrische Construction den Scheitel eines Umdrehungskegels mit gegebenem Scheitelwinkel, welcher einen gegebenen Kegelschnitt enthält, zu bestimmen. (Möglichkeitsbedingungen.)

3) Auf einen gegebenen Umdrehungskegel einen Kegelschnitt von gegebener Form und Grösse zu legen.

4) Den Ort der Projectionen der Endpunkte der Brennpunktsachse eines Kegelschnittes auf die Achsen der Umdrehungskegel, welche den Kegelschnitt enthalten, zu finden.

5) Zu beweisen, dass zwei Umdrehungskegel, welche denselben Kegelschnitt enthalten, eine gemeinschaftliche eingeschriebene Kugel haben, und sich noch einmal in einem ebenen Kegelschnitte schneiden.

XII. Die Sätze von Pascal und Brianchon.

193. Wenn man jeden Punkt X einer ebenen Figur durch eine Gerade mit einem festen Punkte T im Raum verbindet, wird der Schnittpunkt X' der Geraden TX mit einer andern festen Ebene dem Punkte X entsprechen in einer neuen ebenen Figur, die man die Centralprojection der ersten nennt. Den Punkten X einer Geraden in der ersten Figur entsprechen Punkte X' einer Geraden in der anderen, und umgekehrt; die projicirenden Geraden TX liegen nämlich dann in einer Ebene. Wegen 191. und 192. kann jede Kegelschnittslinie als Centralprojection eines Kreises betrachtet werden, nämlich desjenigen, in welchem ein den Kegelschnitt enthaltender Umdrehungskegel von einer auf der Achse senkrechten Ebene geschnitten wird. Wir werden dieses benutzen, um einige wichtige Sätze, die wir dann erst für den Kreis beweisen müssen, auf alle Kegelschnitte auszudehnen.

Ein specieller Fall der Centralprojection ist die Parallelprojection, wo die projicirenden Geraden parallel sind (T unendlich entfernt). Die in 170. beschriebene Transformation könnte man dadurch erhalten, dass man erstens die Ebene der gegebenen Figur um einen willkürlichen Winkel um die Transformationsachse dreht, und sie nachher parallel mit einer gegebenen Richtung auf die gegebene Ebene projicirt.

194. Wenn ein Sechseck, das eigentlich oder uneigentlich[1]) sein kann, einem Kreise eingeschrieben ist, werden die drei Schnittpunkte von Gegenseiten in einer Geraden liegen.

Wir werden die Ecken — welche sechs willkürliche Punkte des Kreises sind, in einer willkürlichen Ordnung genommen — 1, 2, 3, 4, 5, 6 nennen. Die Gegenseitenpaare sind dann 12 und 45, deren Schnittpunkt wir P nennen, 23 und 56 mit dem Schnittpunkte Q, 34 und 61 mit dem Schnittpunkte R. Es ist dann zu beweisen[2]), dass P, Q und R in einer Geraden liegen. Construiren wir drei neue Kreise, den ersten durch 1 und 4 und mit dem Centrum im Schnittpunkte A der Tangenten des gegebenen Kreises in 1 und 4, den zweiten durch 2 und 5 und mit dem Centrum im Schnittpunkte B der Tangenten in diesen Punkten, und den dritten durch 3 und 6 und mit dem Centrum im Schnittpunkte C der Tangenten in diesen Punkten. Die Gerade 12 bildet dann gleiche Winkel mit den Halbmessern $A1$ und $B2$; $A1$ ist also dem Halbmesser an den Punkt, wo 12 den Kreis um B ausser in 2 schneidet, parallel. Hieraus folgt, dass 12 durch einen Aehnlichkeitspunkt der Kreise um A und B gehen muss. Dasselbe muss mit 15, 42 und 45 der Fall sein. Weil nun 12 und 15 durch verschiedene Aehnlichkeitspunkte gehen müssen — denn sonst würden sie mit einander zusammenfallen — ebenso 15 und 45, so muss der Schnittpunkt P von 12 und 45 ein Aehnlichkeitspunkt sein. Ebenso ist Q ein Aehnlichkeitspunkt der Kreise um B und C, und R ein Aehnlichkeitspunkt der Kreise um C und A. Durch Zeichnen einer beliebigen Figur wird man finden, dass auf dieser, die Aehnlichkeitspunkte entweder alle äussere, oder zwei die innern sind, der dritte ein äusserer ist; aber es genügt nicht diese zufällige Figur zu betrachten. Man sieht aber, dass, wenn das Sechseck

1) Ein uneigentliches Vieleck ist ein solches, wo Seiten sich zwischen den sie begrenzenden Ecken schneiden.

2) Dieser Beweis ist den im Vorworte citirten Vorlesungen von Steiner entnommen. Eine Figur ist unentbehrlich; diejenige, die der Leser selbst zeichnet, wird ihm aber am nützlichsten sein.

sich ändert, indem eine Ecke sich auf dem Kreise bewegt, der Uebergang von einem innern zu einem äusseren Aehnlichkeitspunkte immer gleichzeitig zwei Aehnlichkeitspunkte umfassen wird. P, Q und R bleiben dann stets solche Aehnlichkeitspunkte, die in einer Geraden liegen (14).

195. Wenn ein Sechseck einem Kegelschnitte eingeschrieben ist, so werden die drei Schnittpunkte von Gegenseiten in einer Geraden liegen. (Pascal's Satz). — Der Kegelschnitt kann nämlich als Centralprojection eines Kreises betrachtet werden (193). Sein eingeschriebenes Sechseck wird dann gleichzeitig die Centralprojection eines dem Kreise eingeschriebenen Sechseckes sein. Die Schnittpunkte der Gegenseiten dieser letzten Figur liegen in einer Geraden (194). Dasselbe muss also auch mit ihrer Centralprojection der Fall sein.

196. Aufgabe: Einen Kegelschnitt durch fünf gegebene Punkte 1, 2, 3, 4, 5 zu legen.

Auflösung: Wir betrachten erstens den allgemeinen Fall, wo nicht drei der Punkte in einer Geraden liegen. Anfangs werden wir auch voraussetzen, dass wirklich ein Kegelschnitt durch die fünf Punkte geht. Dass zur Erfüllung dieser Forderung keine besondere Lage der Punkte nöthig ist, wird sich dann nachher zeigen.

Wir können erstens neue Punkte des gesuchten Kegelschnittes bestimmen. Wir suchen, indem wir die Benennungen von 194. vom Kreise auf den Kegelschnitt übertragen, seinen Schnittpunkt 6 mit einer beliebigen Geraden 56 durch den Punkt 5.

Der Schnittpunkt Q dieser Geraden mit 23 und der Schnittpunkt P von 12 und 45 bestimmen die Gerade PQ, welche 34 im selben Punkte R schneidet, wie die Gerade 16 von 1 an den gesuchten Punkt.

Wenn man in dieser Construction verschiedene Geraden 56 durch 6 wählt, so erhält man auch verschiedene Punkte 5, die immer durch die Secante 16 bestimmt werden. Diese Secante ist noch völlig bestimmt im Falle, wo 56 mit 51 zusammenfällt und also 6 mit 1 zusammenfallen muss; in diesem Falle muss sie die Tangente im Punkte 1 sein. Wir können auf diese Weise die Tangenten in allen bekannten — also auch in den nach und nach construirten — Punkten bestimmen.

Wenn man die Gerade 56 mit 12 parallel wählt, so ist dadurch der diese Sehnen halbirende Durchmesser bestimmt. Ein neuer Durchmesser wird — wenn er dem ersten nicht parallel ist —

das **Centrum** O bestimmen. Indem nun ein mit 12 paralleler Durchmesser dem ersten construirten Durchmesser conjugirt ist, hat man (154) die Mittel, die **Achsen** und **Brennpunkte** bestimmen zu können. Um sich dabei der bequemen Constructionen 150. und 151. zu bedienen, kann man erstens die Tangente im Punkte 1 auf die schon beschriebene Weise construiren; die Länge des dem $O1$ conjugirten Durchmessers ist nämlich dann durch die Schnittpunkte dieser Tangente mit den schon gefundenen conjugirten Durchmessern bestimmt (143). — Wären die gefundenen Durchmesser mit einander parallel, so müsste die Curve eine Parabel mit bekannter Achsenrichtung sein, deren Achse, Brennpunkt und Leitlinie sich also auch leicht aus 161. bestimmen lassen. Man könnte übrigens auch Sechsecke benutzen, um die Tangente dieser Parabel in einem gegebenen Punkte und den zweiten Schnittpunkt einer auf die Durchmesser senkrechten Geraden durch einen gegebenen Punkt zu construiren, wodurch die Achse und der Brennpunkt fast unmittelbar bestimmt sind.

Man findet also eine vollständige Bestimmung des Kegelschnittes, welcher durch die fünf gegebenen Punkte geht, vorausgesetzt, dass ein solcher wirklich existirt. Um nun auch zu sehen, dass dies immer der Fall ist, können wir uns die Bestimmungen folgendermassen ausgeführt denken. Erstens sei der zweite Schnittpunkt 6 der mit 1 2 parallelen Gerade 5 6 mittelst des Sechseckes 1 2 3 4 5 6 bestimmt, und nachher, mittelst des Seckseckes 1 2 3 5 6 7, der zweite Schnittpunkt 7 der mit dem Durchmesser, welcher die Sehnen 1 2 und 5 6 halbirt, parallelen Geraden 1 7. Der Mittelpunkt der Sehne 1 7 bestimmt dann den mit 1 2 parallelen Durchmesser, welcher dem ersten conjugirt ist. Nun weiss man (154), dass ein Kegelschnitt existirt mit diesen conjugirten Durchmessern, welcher noch durch 1 und 5 geht. Wegen der Lagen der Durchmesser wird er noch durch 2, 6 und 7 gehen, weiter wegen der benutzten Secksecke 1 2 3 5 6 7 und 1 2 3 4 5 6, die auch zur Construction von 3 und 4, wenn 1, 2, 5, 6, 7 bekannt waren, benutzt werden könnten, durch 3 und 4. — Wenn der Punkt 7 sich bis ins Unendliche entfernt hätte, würden wir auch wirklich eine Parabel durch alle gegebene Punkte gefunden haben (160. oder 161.)

Wenn drei der gegebenen Punkte auf einer Geraden lägen, würde der gesuchte Kegelschnitt aus dieser und der durch die zwei anderen Punkte bestimmten Geraden bestehen. Der Pascal'sche Satz besteht noch, wenn man die Ecken wechselweise auf den Geraden wählt. —

Wenn mehr als drei Punkte auf einer Geraden liegen, so ist der Kegelschnitt nicht mehr völlig bestimmt.

197. Wenn die drei Paare von Gegenseiten eines Sechseckes sich in drei Punkten einer Geraden schneiden, so liegen seine Ecken auf einem Kegelschnitte. — Wegen 196. geht nämlich erstens ein Kegelschnitt durch die 5 Ecken, und dann derselbe Kegelschnitt auch durch die letzte.

198. Wenn ein — eigentliches oder uneigentliches — Sechseck einem Kreise umgeschrieben ist, so werden die Diagonalen welche gegenüberliegende Ecken verbinden, durch einen Punkt gehen.

Wir werden*) die Berührungspunkte, in derselben Ordnung genommen wie die Seiten des Sechsecks, R_1, R_2 . . ., R_6 nennen. Auf den Seiten bestimmen wir weiter Punkte S_1, S_2, . . ., S_6, indem wir auf alle eine willkürliche Strecke so absetzen, dass $R_1 S_1 = - R_2 S_2 = R_3 S_3 = - R_4 S_4 = R_5 S_5 = - R_6 S_6$, wo derjenige Sinn einer Tangente als der positive gerechnet wird, welcher, vom Berührungspunkte aus gesehen, dem Bogen (z. B.) rechts liegt. $R_1 S_1$ und $R_4 S_4$ werden dann einen Kreis (A) in S_1 und S_4 berühren, $R_2 S_2$ und $R_5 S_5$ einen Kreis (B) in S_2 und S_5, $R_3 S_3$ und $R_6 S_6$ einen Kreis (C) in S_3 und S_6. Der Schnittpunkt von $R_1 S_1$ und $R_2 S_2$ hat dieselbe Potenz in Beziehung auf die beiden Kreise (A) und (B), ebenso der Schnittpunkt von $R_4 S_4$ und $R_5 S_5$; die diese Punkte verbindende Gerade ist also die Potenzlinie von (A) und (B) und muss durch den Potenzpunkt von (A), (B) und (C) gehen. Dasselbe ist der Fall mit den beiden andern Diagonalen, welche die gegenüberliegenden Ecken des Sechsecks verbinden.

199. Wenn ein Sechseck einem Kegelschnitte umgeschrieben ist (wenn seine Seiten den Kegelschnitt berühren), so werden die Diagonalen, welche gegenüberliegende Ecken verbinden, durch einen Punkt gehen (Brianchon's Satz). Wird aus 198. durch Centralprojection hergeleitet.

200. Aufgabe: Einen Kegelschnitt mit fünf gegebenen Tangenten zu construiren. **Auflösung:** Mittelst 199. kann man die zweite Tangente bestimmen, welche durch einen Punkt P einer gegebenen Tangente geht, indem P Ecke eines von den gegebenen und der gesuchten Tangente gebildeten Sechsecks ist. Die gesuchte Tangente wird dann durch seinen Schnittpunkt mit einer

*) Den folgenden Beweis sowohl als auch den darauf gestützten elementaren Beweis von 218. hat mir Hr. Lebensversicherungsdirector F. Bing mündlich mitgetheilt.

andern gegebenen Tangente bestimmt. Dieser Punkt wird der Berührungspunkt der letzten Tangente sein, wenn P der Schnittpunkt der beiden gegebenen Tangenten ist. Bestimmt man auf diese Weise die Berührungspunkte der fünf gegebenen Tangenten, so wird man die Aufgabe auf 196. zurückführen. Mehr direct erhält man ein Paar conjugirter Durchmesser dadurch, dass man erstens die einer gegebenen Tangente parallele Tangente sucht — welches dadurch geschieht, dass man den Punkt P sich bis ins Unendliche entfernen lässt, also die durch P gehenden Geraden durch Parallelen ersetzt — und dann die Berührungspunkte der parallelen Tangenten construirt.

Dass man wirklich auf diese Weise einen Kegelschnitt erhält, welcher alle die gegebenen Tangenten berührt, könnte man entweder in ähnlicher Weise wie in 196. herleiten oder aus 196. schliessen.

201. Die Seiten eines Sechseckes, in welchem die Diagonalen, welche gegenüberliegende Ecken verbinden, durch einen Punkt gehen, berühren einen Kegelschnitt (200).

Anmerkung. Wir haben schon in den Constructionen von 196. und 200. solche Specialfälle der Sechsecke von Pascal und Brianchon benutzt, wo zwei Ecken des ersten oder zwei Seiten des letzten zusammenfielen, oder wo ein in der Construction benutzter Punkt sich bis ins Unendliche entfernte. Der letzte Fall tritt auch dann ein, wenn ein gegebener Punkt des Kegelschnittes unendlich entfernt ist, (wenn bestimmt ist, dass die Curve eine Hyperbel mit einer gegebenen Asymptotenrichtung oder eine Parabel mit gegebener Achsenrichtung sein soll) oder wenn zwei Gerade, die in der Construction einen Punkt bestimmen sollen, sich von selbst als parallel ergeben. Auch eine ganze Gerade kann sich bis ins Unendliche entfernen, in welchem Falle alle ihre Schnittpunkte mit anderen Geraden auch unendlich entfernt sein werden. Zu verlangen, dass ein Kegelschnitt eine unendlich entfernte Gerade berühren soll, ist mit der Forderung identisch, dass er eine Parabel sein soll, weil die Tangenten in den unendlich entfernten Punkten einer Hyperbel nicht unendlich entfernt sind. Die durch den Berührungspunkt einer solchen Parabeltangente gehenden Geraden sind mit der Achse parallel.

Uebungsaufgaben.

1) Zu beweisen, dass die Seiten eines einem Kegelschnitte eingeschriebenen Dreieckes die Tangenten in den gegenüberliegenden Ecken in drei Punkten einer Geraden schneiden.

2) Zu beweisen, dass die Geraden, welche die Ecken eines einem Kegelschnitte umgeschriebenen Dreiecks mit den Berührungspunkten der gegenüberliegenden Seiten verbinden, durch einen Punkt gehen.

3) Eine Hyperbel mit gegebenen Asymptotenrichtungen durch drei gegebene Punkte zu legen.

4) Den Satz von Brianchon anzuwenden zur Bestimmung der Achsenrichtung der Parabel, welche 4 gegebene Gerade berührt, (Die Aufgabe eine Parabel durch vier gegebene Tangenten zu bestimmen ist schon früher als Beispiel der Anwendung von 76. gestellt).

XIII. Ebene Schnitte schiefer Kreiskegel.

202. Eine Centralprojection (S') eines Kegelschnittes (S) ist selbst ein Kegelschnitt. — Die Schnittpunkte der Gegenseiten eines der Curve (S') eingeschriebenen Sechseckes werden nämlich in einer Geraden liegen, weil dieses Sechseck die Centralprojection eines dem Kegelschnitte (S) eingeschriebenen Sechseckes (195) ist. Der durch 5 Punkte von (S') gehende Kegelschnitt wird also durch jeden Punkt dieser Curve gehen (197) und mit ihr ganz zusammenfallen. — Wenn man statt der Centralprojection eine Parallelprojection betrachtet (193), so ergiebt sich, dass bei der in 170. beschriebenen Transformation einem Kegelschnitte immer ein Kegelschnitt entspricht.

203. Ein ebener Schnitt eines Kreiskegels ist immer eine Kegelschnittslinie. Folgt aus 202., wenn (S) ein Kreis ist.

204. Ein ebener Schnitt eines Kreiskegels senkrecht auf der Ebene, welche den Kegel symmetrisch theilt, hat eine in der Schnittgeraden mit dieser Ebene gelegene Achse. Wenn die Schnittebene ausserdem mit der Halbirungsgeraden des Winkels der in der Symmetrieebene liegenden Erzeugenden des Kegels, denselben Winkel wie die Ebene der kreisförmigen Leitcurven des Kegels bildet, so wird die Schnittcurve selbst ein Kreis sein. Die Achsen werden nämlich dann einander gleich.

Uebungsaufgaben.

1) Unter welchen Bedingungen wird die Schnittgerade einer Ebene mit der Symmetrieebene eines Kreiskegels Brennpunktsachse der Schnittcurve der ersten Ebene sein?

2) Zu beweisen, dass die auf der Symmetrieebene eines Kreiskegels senkrechten Ebenen, deren Schnitte Ellipsen sind, in welchen die auf der Symmetrieebene senkrechten Achsen eine constante Grösse haben, *a*) eine feste Hyperbel in der Symmetrieebene berühren, *b*) Kegel mit constantem Volumen abschneiden.

XIV. Pol und Polare.

205. Ausser den Sätzen von Pascal und Brianchon können viele andere mittelst der Centralprojection entwickelt werden. Von solchen werden wir hier nur den wichtigsten derjenigen, welche die sogenannten Polareigenschaften betreffen, mitnehmen. Dabei werden wir den Umstand benutzen, dass wegen des Hilfssatzes 125. die Centralprojection zweier harmonisch verbundener Punktpaare einer Geraden zwei neue harmonisch verbundene Punktpaare sind.

Wir können auch den genannten Satz umkehren und sagen, dass, wenn AA' und BB' zwei harmonisch verbundene Punktpaare einer Geraden, und A_1A_1', B_1B_1' zwei harmonische Punktpaare einer andern Geraden in derselben Ebene sind, welche so liegen, dass die Geraden A_1A, $A_1'A'$ und B_1B durch einen Punkt T gehen, auch $B_1'B'$ durch T gehen wird. Dies folgt daraus, dass, wenn die Punkte A_1A_1', B_1 gegeben sind, der Punkt B_1' durch die harmonische Verbindung völlig bestimmt ist.

Wir brauchen noch die folgenden Sätze über Figuren, die von Geraden und Kreisen handeln (206—208).

206. Wenn die Punkte A und A' in Beziehung auf das Punktpaar BB' auf derselben Geraden harmonisch verbunden sind, und M der Mittelpunkt von AA' ist, so hat man $BM \,.\, BB' = BA \,.\, BA'$. — Wenn man nämlich in der Gleichung $\frac{AB}{A'B} = -\frac{AB'}{A'B'}$, wodurch wir gewöhnlich die harmonische Verbindung ausdrücken, die Punkte mittelst ihrer mit Vorzeichen gerechneten Abstände von B bestimmt, so findet man

$$BB' = \frac{2BA \,.\, BA}{BA + BA'} = \frac{BA \,.\, BA'}{BM}.$$

207. In einem vollständigen Vierseite — das aus vier Geraden, ihren sechs Schnittpunkten A, A'; B, B'; C, C', welche drei Paare gegenüberliegender Ecken bilden, und den Verbindungslinien dieser Ecken AA', BB', CC', welche die Diagonalen genannt

werden, besteht — wird jede Diagonale von den zwei andern harmonisch getheilt. — Bezeichnen wir nämlich durch E den Schnittpunkt der Geraden BB' und CC' und durch G und F die mit E in Beziehung auf B und B', resp. C und C', harmonisch verbundenen Punkte, so werden (205) sowohl A, F und G, als auch A', F und G je auf einer Geraden liegen. Weil die beiden so bestimmten Geraden durch F und G gehen, müssen sie zusammenfallen in eine Gerade, die, weil sie durch A und A' geht, eben die dritte Diagonale AA' ist. Die Punkte F und G sind also die Punkte, wo die andern Diagonalen CC' und BB' von AA' getroffen werden.

208. Der Ort der Punkte Y, welche mit einem festen Punkte E in Beziehung auf die Schnittpunkte XX' der Geraden EY mit einem Kreise harmonisch verbunden sind, ist eine Gerade.[1])

Der Ort des Mittelpunktes M der Sehnen XX' ist nämlich ein durch E gehender Kreis. Wegen 206. hat der Punkt Y dieselbe Potenz $YE \,.\, YM = YX \,.\, YX'$ in Beziehung auf diesen Kreis und den gegebenen. Der Ort ist also die Potenzlinie (3) dieses Kreises und des gegebenen.

Die Beweisführung zeigt, dass die Gerade senkrecht auf dem durch E gehenden Durchmesser ist, und dass er, wenn E ausser des Kreises liegt, durch die Berührungspunkte der durch E gehenden Tangenten geht.

209. Der Ort der Punkte Y, welche mit einem festen Punkte E in Beziehung auf die Schnittpunkte X und X' der Geraden EY mit einem Kegelschnitte harmonisch verbunden sind, ist eine Gerade, welche die Polare des Punktes E in Beziehung auf den Kegelschnitt genannt wird. Dieser Satz wird aus 208. mittelst Centralprojection gefolgert.

210. **Aufgabe:** Ein Kegelschnitt sei vollständig gezeichnet; mittelst des Lineales die Polare eines gegeben Punktes E zu construieren. — **Auflösung:** Man nimmt E zum Schnittpunkte zweier Diagonalen BB' und CC' eines vollständigen Vierseites, in welchem die zwei Paare von gegenüberliegenden Ecken B, B' und C, C' auf dem Kegelschnitte liegen. Die durch das dritte Paar gegenüberliegender Ecken A, A' bestimmte Diagonale wird dann die Polare von E sein, weil sie die Geraden BB' und CC' in denselben Punkten wie diese Polare schneidet (207). — In dieser Construction sind EBB' und ECC' zwei willkürliche Geraden durch E, welche den Kegelschnitt schneiden, oder B und C sind zwei willkürliche Punkte

1) Vergl. die Anmerkung zu 134.

des Kegelschnittes. Dadurch kann man erreichen (was uns in 211. nützlich sein wird), dass der Schnittpunkt A der Geraden BC mit der Polare ein willkürlicher Punkt dieser Geraden wird.

211. Wenn die Polare eines Punktes E durch einen Punkt A geht, so wird umgekehrt die Polare von A durch E gehen. — Wendet man nämlich die in 210. gegebene Construction so an, dass der gegebene Punkt A eine Ecke des Vierseits wird, so ist A der Schnittpunkt der beiden Diagonalen BC und $B'C'$ eines anderen vollständigen Vierseits, in welchem E eine Ecke ist. — Wenn die Gerade AE den Kegelschnitt schneidet, wird der Satz auch daraus folgen, dass E und A dann harmonisch verbunden sein müssen in Bezug auf die Schnittpunkte.

212. Jede Gerade in der Ebene eines Kegelschnittes ist in Beziehung auf den Kegelschnitt die Polare eines Punktes E, welchen man als den Schnittpunkt der Polaren zweier Punkte der Geraden bestimmen kann (211). Dieser Punkt wird der Pol der Geraden genannt.

213. Wenn ein Punkt E der Schnittpunkt zweier Tangenten an einen Kegelschnitt ist, so liegen die Berührungspunkte auf der Polare von E. — Der mit E harmonisch verbundene Punkt in Beziehung auf zwei zusammenfallende Punkte einer durch E gehenden Geraden fällt nämlich mit den coincidirenden Punkten zusammen. Der Satz folgt übrigens auch aus 208. Schluss. — Man kann dadurch mittelst des Lineales die Tangenten von einem gegebenen Punkt an einen vollständig gezeichneten Kegelschnitt ziehen (210).

214. Die Polare eines Punktes E enthält den Schnittpunkt der Tangenten in den Punkten, in welchen eine willkürliche Gerade durch E den Kegelschnitt schneidet (211. und 213.).

215. Die Polare eines Punktes E einer Leitlinie eines Kegelschnittes geht durch den der Leitlinie gehörigen Brennpunkt F und ist senkrecht auf der Geraden EF; die Polare eines Brennpunktes ist die zugehörige Leitlinie (120).

216. Die Polare eines Punktes E, welcher unendlich fern in einer gegebenen Richtung liegt, ist der Durchmesser, der die in dieser Richtung gezogenen Sehnen halbirt; die Polare des Centrums ist unendlich entfernt. — Dies folgt daraus, dass, wenn der eine Punkt E von zwei in Beziehung auf das Punktpaar A, A' harmonisch verbundenen Punkten E, E' sich bis ins Unendliche entfernt, der andere E' der Mitttelpunkt des Paares A, A' sein wird. Mittelst

dieses Satzes kann man die wichtigsten früher gefundenen Durchmessersätze aus den jetzt gefundenen Polarsätzen folgern.

217. Die Polare eines Punktes E ist mit dem conjugirten Durchmesser des durch E gehenden Durchmessers parallel (216. und 211.; wenn E der Schnittpunkt zweier Tangenten ist, ist der Satz schon in 140 bewiesen).

Uebungsaufgaben.

1) 5 Punkte eines Kegelschnittes sind gegeben; mittelst des Lineals die Polare eines gegebenen Punktes und den Pol einer gegebenen Geraden zu construiren.

2) 5 Tangenten eines Kegelschnittes sind gegeben; mittelst des Lineals den Pol einer gegebenen Geraden und die Polare eines gegebenen Punktes zu construiren.

3) Wie kann man die Polarsätze dazu benutzen, den Brianchonschen Satz (199) aus dem Pascal'schen (195) herzuleiten?

XV. Weitere Sätze über confocale Kegelschnitte.

In 94—101. sind schon einige Sätze über confocale Kegelschnitte entwickelt. Die späteren Abschnitte — und in diesen namentlich der Satz 198 von einem Sechsecke, welches einem Kreise umgeschrieben ist, in Verbindung mit einigen weiteren elementaren Hilfssätzen, welche wir jetzt entwickeln werden (218—219), — erlauben uns etwas weiter zu gehen. Dabei werden wir nur von Ellipsen und Hyperbeln sprechen, indem die Parabeln als Grenzformen aufzufassen sind.

218. Wenn die Gerade, welche einen Punkt F mit dem Centrum P eines Kreises verbindet, einen Winkel der Geraden FA und FA' von F an ein Paar gegenüberliegender Ecken A und A' des von vier Tangenten des Kreises gebildeten vollständigen Vierseits halbirt, so wird sie auch einen Winkel der Geraden FB und FB' und einen Winkel der Geraden FC und FC', welche F mit den zwei anderen Paaren gegenüberliegender Ecken B und B', C und C' verbinden, halbiren.

Um diesen Satz zu beweisen, kann man die Figur um die Gerade FP bis in ihre symmetrische Lage in Beziehung auf diese Gerade drehen. Der Kreis wird dann wieder sich selbst decken, und das umgeschriebene Vierseit $ABA'B'$ wird in ein neues um-

geschriebenes Vierseit $aba'b'$ fallen. Die Gerade AB wird die entsprechende Gerade ab, und die Gerade $A'B'$ die Gerade $a'b'$, in den Punkten H und I der Symmetrieachse schneiden. Weil nun das Sechseck $ab'IA'BH$ dem Kreise umgeschrieben ist, werden (198) die Geraden aA', $b'B$ und IH durch einen Punkt gehen, und weil aA' und IH sich in F schneiden, muss auch $b'B$ durch eben diesen Punkt gehen. Die Geraden FB und FB' liegen also symmetrisch in Beziehung auf FP.

219. Wenn, umgekehrt, die Winkel der Geraden FA und FA' und der Geraden FB und FB', welche einen Punkt F mit zwei Paaren gegenüberliegender Seiten eines einem Kreise umgeschriebenen vollständigen Vierseits verbinden, dieselben Halbirungslinien haben, so wird die eine von diesen durch das Centrum P des Kreises gehen. — Wäre nämlich dies nicht der Fall, so würde man auf der Tangente BA' den Punkt A'' so bestimmen können, dass FA'' (im entgegengesetzten Umlaufsinne) denselben Winkel mit FP wie FA bildete, und von A'' die zweite Kreistangente $A''B''$ ziehen, die $B'A$ in B'' schnitte. Dann würde FP einen Winkel der Geraden FA und FA'' und also auch (218) einen Winkel der Geraden FB und FB'' halbiren. Construirt man jetzt (107) einen Kegelschnitt mit dem Brennpunkt F, welcher die Geraden $B'A$, AB und BA' berührt, so wird dieser wegen des Gegebenen auch $A'B'$ und wegen des eben Gefundenen auch $A''B''$ berühren (82). Wäre nun $A''B''$ wirklich von $A'B'$ verschieden, so würde der construirte Kegelschnitt und der Kreis 5 gemeinschaftliche Tangenten haben, was unmöglich ist (200).

220. Wenn man von zwei Punkten A und A' eines Kegelschnittes die Tangenten an einen Kreis mit dem Centrum im Schnittpunkte P der Tangenten des Kegelschnittes in A und A' zieht, so werden diese vier Tangenten einen mit dem ersten confocalen Kegelschnitt berühren.

Erster Beweis. Wenn F ein Brennpunkt des gegebenen Kegelschnittes (I) ist, so giebt es einen Kegelschnitt (K) mit dem Brennpunkte F, welcher drei der vier Kreistangenten berührt (107). Weil die Gerade FP einen der von FA und FA' gebildeten Winkel halbirt (80), wird er auch (218) einen Winkel der Geraden FB und FB', welche F mit einem anderen Paare gegenüberliegender Ecken des von den vier Tangenten gebildeten Vierseites verbinden, halbiren. Der Kegelschnitt (K) berührt dann auch die vierte Tangente (82). Die Gerade von A an den zweiten Brennpunkt F_1 des Kegelschnittes (K) ist diejenige, welche mit AB (im entgegen-

gesetzten Umlaufsinne) denselben Winkel bildet wie AF mit AB' (73). Die Tangente AP halbirt also auch einen Winkel von AF und AF_1, woraus folgt, dass AF_1 auch durch den zweiten Brennpunkt des gegebenen Kegelschnittes (J) gehen muss. Dasselbe muss mit $A'F_1$ der Fall sein. F_1 ist also eben auch der zweite Brennpunkt des gegebenen Kegelschnittes.

Zweiter Beweis. B und B' seien auch hier ein Paar gegenüberliegender Ecken des Vierseits. Der Kegelschnitt (K) mit denselben Brennpunkten F und F_1 wie der gegebene (I), welcher AB berührt, wird auch AB' berühren (98). P ist das Centrum eines Kreises, welcher die Brennstrahlen FA, FA', F_1A, F_1A' an A und A' berührt (83). Die Gerade BP halbirt einen Winkel der Geraden BA und BA', also auch einen Winkel der Geraden BF und BF_1 (218). Hieraus folgt, dass auch BA' den Kegelschnitt (K) berühren muss, und ebenso wird $B'A'$ diesen Kegelschnitt berühren.

221. Die vier Tangenten von zwei Punkten A und A' eines Kegelschnittes (I) an einen mit diesem confocalen Kegelschnitt (K) berühren einen Kreis mit dem Centrum im Schnittpunkte P der Tangenten des Kegelschnittes (I) in A und A'. — Wenn nämlich dieser Punkt nicht denselben Abstand von den vier Tangenten an (K) hätte, würde man einen Kreis mit diesem Centrum construiren können, welcher die ihm am nächsten liegende dieser Tangente berührt, und nachher die übrigen drei Tangenten an diesen Kreis von A und A' legen. Diese würden den Kegelschnitt (K), der durch die beiden Brennpunkte und eine Tangente bestimmt ist, berühren (220), und müssten also mit den gegebenen Geraden zusammenfallen.

222. Wenn ein Kegelschnitt (K) und ein Kreis (mit dem Centrum P) vier gemeinschaftliche Tangenten haben, so werden diese ein vollständiges Vierseit bilden, in welchem jedes Paar gegenüberliegender Ecken auf einem mit (K) confocalen Kegelschnitte liegt. — Wenn A und A' gegenüberliegende Ecken sind, wird es immer einen Kegelschnitt (J) geben (98), welcher mit (K) confocal ist und die Gerade AP in A berührt. Es ist zu beweisen, dass A' der Berührungspunkt der andern Tangente vom Punkte P an (J) ist. Wenn F ein Brennpunkt der beiden Kegelschnitte ist, werden die Winkel der Geraden FA und FA' und die Winkel der Geraden von F an die beiden anderen Paare gegenüberliegender Ecken des vollständigen Vierseits dieselben Halbirungslinien haben (82). FP ist dann die eine dieser gemeinschaftlichen Halbirungslinien (219). Die Gerade FA' wird also durch den gesuchten Berührungspunkt gehen;

wenn F_1 der andere Brennpunkt ist, wird dasselbe von $F_1 A'$ gelten. A' ist also wirklich der gesuchte Berührungspunkt.

Aus dem hier bewiesenen Satze folgt, dass unter den in 220. und 221. gegebenen Bedingungen nicht nur A und A', sondern auch die beiden andern Paare gegenüberliegender Ecken auf Kegelschnitten liegen, welche mit dem gegebenen confocal sind.

223. Wenn man von einem willkürlichen Punkte P Tangenten an zwei confocale Kegelschnitte zieht, so werden die von den Berührungspunkten A und A' mit dem einen Kegelschnitte an die Berührungspunkte B und B' mit dem andern gezogenen Geraden sowohl einen mit den gegebenen confocalen Kegelschnitt, als auch einen Kreis mit dem Centrum P berühren. — P ist nämlich das Centrum eines Kreises, welcher die Geraden FA, FA', $F_1 A$ und $F_1 A'$ berührt (83). BP halbirt einen Winkel der Geraden BF und BF_1, also auch (218) einen Winkel der Geraden BA und BA'. Der Kreis mit dem Centrum P, welcher BA berührt, wird also auch BA' berühren u. s. w.

224. Wenn man einen willkürlichen Punkt B der Ebene mit den Brennpunkten F_1 und F eines Kegelschnittes verbindet, werden die Halbirungslinien der Winkel der Geraden BF und BF_1 so verbunden sein, dass die eine durch den Pol des andern in Beziehung auf den Kegelschnitt geht. — Um dieses zu beweisen, bemerken wir erstens, dass wenigstens die eine der Halbirungslinien, welche die endliche Strecke $F_1 F$ trifft, die Curve schneidet, wenn sie eine Ellipse ist, und wenigstens die andere Halbierungslinie, wenn sie eine Hyperbel ist. Jedenfalls wird also eine der Halbirungslinien die gegebene Curve, die wir (I) nennen mögen, in zwei Punkten A und A' schneiden. Nennen wir nun den mit (I) confocalen Kegelschnitt, der in B die Gerade AA' berührt (K), so haben wir, mit unveränderten Benennungen einen Grenzfall von 221., indem nur hier die Tangenten AB und $A'B$ zusammengefallen sind, und also ihr Schnittpunkt B in den Berührungspunkt gefallen ist. Die Gerade BP von B an den Schnittpunkt P der Tangenten des Kegelschnittes (I) in A und A' muss also einen der Winkel der zusammenfallenden Geraden BA und BA' halbiren, also senkrecht auf AA' sein. Der Pol P von AA' liegt also auf der andern Halbirungslinie der Winkel der Geraden BF und BF_1. Daraus folgt, dass auch der Pol dieser Halbirungslinie auf AA' liegt (211).

Im Falle, wo B der Schnittpunkt zweier Tangenten des gegebenen Kegelschnittes ist, kann man den Satz unmittelbar aus den Polarsätzen herleiten, ohne den Satz 221. zu benutzen.

225. Der Ort der Pole einer gegebenen Geraden l in Beziehung auf eine Reihe confocaler Kegelschnitte ist die auf l in ihrem Berührungspunkte mit einem Kegelschnitte der Reihe senkrechte Gerade (224).

226. Der Ort der Polare eines festen Punktes P in Beziehung auf eine Reihe confocaler Kegelschnitte ist eine Parabel. — Eine Willkürliche der Polare kann nämlich bestimmt werden als die Verbindungslinie der Pole zweier Geraden durch P. Betrachten wir dann die Geraden PF und PF_1 von P an die Brennpunkte, so werden die Pole die Schnittpunkte R und R_1 sein, der auf PF und PF_1 senkrechten Geraden in F und F_1 mit den diesen Brennpunkten gehörigen Leitlinien. Betrachten wir nun verschiedene Kegelschnitte der Reihe, so werden die ihnen gehörigen Punkte R und R_1 proportionale Strecken auf den Geraden FR und FR_1 begrenzen. Es wird dann aus 77. folgen, dass die Parabel, welche FR und FR_1 sowohl als auch zwei der Geraden RR_1 berührt, — welche man mittelst 76. bestimmen kann — alle diese Geraden berühren wird.

Die durch das gemeinschaftliche Centrum O der Kegelschnittsreihe gehenden Polaren werden die gemeinschaftlichen Achsen sein, und die durch P gehenden Polaren sind die Tangenten der durch P gehenden Kegelschnitte der Reihe. Indem diese beiden Polarenpaare rechtwinklig sind, muss die Gerade OP die Leitlinie der gefundenen Parabel sein (102).

XVI. Beispiele aus der Anwendung der Kegelschnittslehre auf die Bewegungslehre.

1) Wurfbewegung.

227. Wenn ein materieller Punkt von einem festen Punkt Z mit einer gewissen Geschwindigkeit v ausgeht, und keinen Kräften unterworfen ist, wird er sich so in der Richtung der Geschwindigkeit weiter bewegen, dass er in der Zeit t bis in den durch $ZQ = y = vt$ bestimmten Punkt gelangt. Wenn er dagegen während derselben Zeit der Schwerkraft unterworfen ist, wird nicht der materielle Punkt selbst, sondern der Schnittpunkt der durch ihn gehenden Verticale mit der Geraden ZQ, auf welcher er sich durch Z bewegte, bis nach Q gelangen, während der materielle Punkt selbst sich auf dieser Verticale um eine Strecke

$$QX = x = \tfrac{1}{2}\, g t^2$$

— wo g die Geschwindigkeit ist, welche die Schwerkraft während der Zeit Eins ertheilt, — von diesem Schnittpunkte entfernt hat. Die Lage X des bewegten Punktes nach Verlaufe der Zeit t wird also auf die feste Verticale durch Z und auf die feste Gerade ZQ durch die Gleichungen

$$y = vt,\ x = \tfrac{1}{2} g t^2$$

bezogen, woraus man durch Elimination von t die Gleichung

$$y^2 = \frac{2v^2}{g} x$$

erhält, wo v und g constant sind. Diese von t unabhängige Gleichung, welche also allen Lagen des bewegten Punktes X entspricht, drückt (160) aus, dass seine Bahn eine Parabel ist, deren Achse vertical steht, die in Z die feste Gerade ZQ berührt und deren Brennpunkt F von Z die Entfernung $FZ = f = \frac{v^2}{2g}$ hat.

Diese Parabel lässt sich leicht construiren; denn die Richtung der Geraden ZF ist durch die Tangente bestimmt, und mittelst der bekannten Länge von ZF findet man den Brennpunkt F. Die Leitlinie der Parabel ist die über Z in derselben Entfernung $\frac{v^2}{2g}$ liegende Gerade.

228. Die Geschwindigkeit des bewegten Punktes ist überall dieselbe, welche er erreichen würde durch einen freien Fall von dem senkrecht über ihm gelegenen Punkte der Leitlinie. — Man kann nämlich jeden Punkt X der Bahn als den (in 227. Z genannten) Anfangspunkt der Bewegung betrachten. Die Gleichung $v = \sqrt{2gf}$ drückt dann den Satz aus.

229. Eine graphische Darstellung der Geschwindigkeit kann man dadurch erhalten, dass der senkrechte Abstand des Brennpunktes von der Tangente in einem Punkte X der Bahn der Geschwindigkeit v in diesem Punkte proportional ist. — Ist nämlich f der Brennstrahl an diesen Punkt und M die Projection des Brennpunktes auf die Tangente, so muss M auf der Tangente im Scheitel A der Parabel liegen (66), und FM wird das geometrische Mittel sein von FX und FA (64). Indem $FA = \frac{p}{4}$, wo p der Parameter ist, hat man dann $FM = \frac{1}{2}\sqrt{f \cdot p}$ und also (228)

$$v = \sqrt{\frac{8g}{p}} \cdot FM.$$

Indem der Punkt M die Gerade AM durchläuft, zeigt also die Variation von FM die Variation der Geschwindigkeit, und weil

diese stets senkrecht auf FM ist, zeigt sie auch die Variation der Richtung der Bewegung.

Weil die Projection von FM auf die Achse der Parabel die constante Grösse $FA = \frac{p}{4}$ hat, muss auch die Projection der auf FM senkrechten Geschwindigkeit auf die auf der Achse senkrechte Gerade AM den constanten Werth $\sqrt{\frac{gp}{2}}$ haben (was man auch unmittelbar aus den Principien der Bewegungslehre folgern konnte). Weil AM die Hälfte der Projection von FX auf die Gerade AM ist, muss dann auch der die Geschwindigkeit darstellende Punkt M die Scheiteltangente mit der constanten Geschwindigkeit $\sqrt{\frac{gp}{8}}$ durchlaufen.

230. Aufgabe: Einen der Schwerkraft unterworfenen Punkt von einem gegebenen Punkte Z aus mit einer gegebenen Geschwindigkeit so zu werfen, dass er einen gegebenen Punkt X trifft. — **Auflösung:** Die Bahn — die erstens in der durch Z und X gehenden Verticalebene liegen muss — wird eine durch Z gehende Parabel sein mit bekannter Leitlinie (227). Der Brennpunkt F muss folglich ein Schnittpunkt, resp. Berührungspunkt sein der Kreise mit den Centren in Z und X, welche die Leitlinie berühren. Nachher bestimmt man leicht die Tangente in Z oder die Richtung des Wurfes.

Man erhält 2, 1 oder 0 Auflösungen, je nachdem die Kreise um Z und X einander schneiden oder berühren oder ganz ausser einander liegen. Die Bedingung der Berührung dieser Kreise ist, dass X auf der Parabel liegt, die den Brennpunkt Z hat und deren Leitlinie doppelt so weit nach oben von Z entfernt ist, als die Leitlinie der gesuchten Bahnparabeln. Diese Parabel, welche wir die Grenzparabel nennen werden, ist auch durch den Brennpunkt Z und ihre Scheiteltangente, welche mit der Leitlinie der Bahnparabeln zusammenfällt, bestimmt.

Wenn der Punkt X auf der concaven Seite der Grenzparabel liegt, hat unsere Aufgabe zwei Lösungen, wenn er auf der convexen Seite liegt, keine.

231. Alle Bahnen der in einer festen Ebene von einem festen Punkte Z aus mit derselben Geschwindigkeit geworfenen Punkte berühren ihre Grenzparabel. — Man sieht erstens, dass die durch einen Punkt X der Grenzparabel gehende Bahnparabel in diesem Punkte die Grenzparabel berührt, weil der Brennpunkt F auf der

Geraden XZ liegt (230). Weiter wird auf jeder Bahnparabel der Punkt, wo sie den Brennstrahl FZ ausser in Z schneidet, ein Punkt der Grenzparabel sein. Man sieht auch, dass eine Bahnparabel und die Grenzparabel nicht andere Berührungspunkte oder Schnittpunkte haben.

Uebungsaufgaben.

1) und 2) Einen der Schwerkraft unterworfenen Punkt von einem gegebenen Punkte Z aus mit einer gegebenen Geschwindigkeit so zu werfen, dass die Bahn eine in einer durch Z gehenden Verticalebene liegende Gerade entweder berührt, oder normal trifft.

3) Mit welcher Geschwindigkeit muss man einen schweren Punkt von einem festen Punkte aus in einer gegebenen Richtung werfen, um einen andern festen Punkt zu treffen?

4) Einen schweren Punkt von einem gegebenen Punkte aus so zu werfen, dass er einen andern gegebenen Punkt mit der möglichst kleinen Geschwindigkeit trifft.

2) Keppler'sche Gesetze.

232. Wir werden hier die, auch in elementaren Lehrbüchern der Physik entwickelte, von Newton gegebene Erklärung des ersten Keppler-schen Gesetzes als bekannt voraussetzen, dagegen seine Erklärung der zwei andern Gesetze beweisen. Wir setzen also als bekannt voraus, dass ein von einem festen Punkte C angezogener materieller Punkt X sich so bewegen wird, dass die von den *radii vectores* CX beschriebenen Sectoren mit den dazu angewandten Zeiträumen proportional sind. Ist s das Areal eines solchen Sectors, t der entsprechende Zeitraum, so hat man

$$s = \tfrac{1}{2} k \,.\, t, \tag{1}$$

wo wir den constanten Werth des Verhältnisses $\frac{1}{2} k$ geschrieben haben. Statt dieser Gleichung kann man, was wir auch als bekannt voraussetzen,

$$v = \frac{k}{d} \tag{2}$$

schreiben, wo v die Geschwindigkeit des bewegten Punktes X ist, d der Abstand des festen Punktes C von der Geraden (Bahntangente), auf welcher der Punkt X sich eben bewegt.

Wenn umgekehrt eine der Gleichungen (1) oder (2) während der Bewegung Statt hat, so geht die Richtung der wirkenden Kraft durch den festen Punkt C.

Weiter erinnern wir daran, dass Geschwindigkeiten, wenn man

sie durch damit proportionale, mit der Bewegungsrichtung parallele, Gerade graphisch darstellt, sich ganz wie Kräfte zusammensetzen, also mittelst Parallelogramme oder solcher Dreiecke, welche die Hälften der Parallelogramme sind. Nun misst man eine auf die Masseneinheit wirkende Kraft, auch Beschleunigung oder beschleunigende Kraft genannt, durch die Geschwindigkeit, welche sie, wenn unverändert, in der Zeit Eins mittheilen würde, oder durch diejenige, welche sie im Zeitraum t mittheilen würde, durch t dividirt. Ist also in einem gegebenen Augenblicke die Geschwindigkeit eines bewegten Punktes durch OS dargestellt — so dass c. OS ihre Grösse ist — und verändert sie sich danach mittelst Kräfte, die je in einem der auf einander folgenden Zeiträume t_1, t_2, t_3 .. unverändert wirken, in Geschwindigkeiten, die auf dieselbe Weise durch die Strecken OS_1, OS_2, OS_3 .. dargestellt werden, so haben die beschleunigenden Kräfte die Grössen

$$\frac{\text{c. } SS_1}{t_1}, \frac{\text{c. } S_1 S_2}{t_2}, \frac{\text{c. } S_2 S_3}{t_3} \ldots$$

gehabt, und mit den Geraden SS_1, S_1S_2, S_2S_3 ... parallel gewirkt.

Wenn nun die Zeiten t_1, t_2, t_3 .. unendlich klein sind, so wird die veränderliche Geschwindigkeit durch die Verbindungsgerade eines festen Punktes O mit einem Punkte S, der sich auf einer Curve (S) bewegt, dargestellt, und die beschleunigende Kraft ist in jedem Augenblicke auf dieselbe Weise durch die Geschwindigkeit w, mit welcher der Punkt S diese Curve durchläuft, dargestellt; hat die Geschwindigkeit v des bewegten Punktes X die Grösse c. OS, so wird die beschleunigende Kraft die Grösse c. w haben, und parallel mit der Tangente der Curve (S) wirken.

Dieser graphischen Darstellung kann man auch dadurch eine leichte Modification geben, dass man die ganze Figur um 90^0 in ihrer Ebene dreht; dann bleibt alles ungeändert mit der einzigen Ausnahme, dass jetzt die Richtungen aller Geschwindigkeiten und Kräfte auf die sie darstellenden Richtungen senkrecht sind. Von der dadurch erhaltenen Darstellungsweise, die wir nun zur Entwickelung des zweiten Kepplerschen Gesetzes benutzen werden, haben wir schon in 229. ein Beispiel gehabt, wo F und M dieselben Bedeutungen hatten wie hier O und S. Der Punkt M durchlief mit constanter Geschwindigkeit eine Gerade, indem die wirkende beschleunigende Kraft senkrecht auf diese Gerade mit constanter Grösse wirkte.

Wir bemerken noch, dass, wo wir im Folgenden von der Grösse von Anziehungen eines festen Punktes O sprechen,

wir dadurch Beschleunigungen, die nach Geraden, welche durch O gehen, wirken, bezeichnen werden, und diese als positiv oder negativ rechnen, je nachdem sie gegen O oder von O ab (Abstossungen) gerichtet sind.

233. Aufgabe: Ein Punkt X bewegt sich auf einem Kegelschnitte, indem er einer Anziehung an einen Brennpunkt F, und keiner andern Kraft, unterworfen ist. Die Grösse dieser Anziehung zu finden.

Auflösung: Sei X ein willkürlicher Punkt der Bahn (die vorläufig eine Ellipse oder Hyperbel sein mag), M und M_1 seien die Projectionen der Brennpunkte F und F_1 auf die Tangente in X und

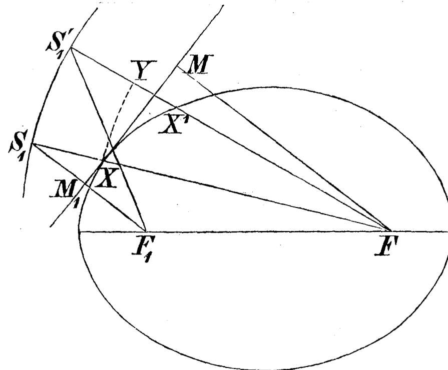


Fig. 8.

endlich S_1 der symmetrische Punkt des Brennpunktes F_1 in Beziehung auf diese Tangente. Dann giebt die Gleichung (2) (siehe auch den Satz 71.)

$$v = \frac{k}{FM} = k. \frac{F_1 M_1}{a^2 - c^2} = \frac{k . F_1 S_1}{2 (a^2 - c^2)}, \qquad (3)$$

wo a und c die gewöhnlichen Bedeutungen haben.

Die Gerade $F_1 S_1$, welche den festen Punkt F_1 mit dem Punkte S_1, der den Kreis $(F, 2a)$ durchläuft, verbindet, stellt also die darauf senkrechte Geschwindigkeit des beweglichen Punktes im Punkte X seiner Bahn dar, und die Anziehung — deren Vorzeichen man vorläufig unbestimmt lassen kann — ist also der, auf FX senkrechten, Geschwindigkeit des Punktes S_1, mit $\frac{k}{2 (a^2 - c^2)}$ multiplicirt, gleich. Um nun diese Geschwindigkeit des Punktes S_1 zu finden, lassen wir den Punkt X sich während der Zeit t bis in einen Punkt X' bewegen, wodurch S_1 den Kreisbogen $S_1 S_1'$ durchläuft. Die gesuchte Geschwindigkeit ist dann der Grenzwerth lim. $\frac{t}{S_1 S_1'}$,

welcher dem Werthe $t = 0$ entspricht. Um diesen Grenzwerth zu berechnen, bezeichnen wir durch u den Kreissector FS_1S_1', durch δ die Differenz XYX' des mit FS_1S_1' concentrischen und ähnlichen Kreissectors FXY und des Ellipsensectors FXX' ($= s$), und endlich durch f den Brennstrahl FX. Man hat dann die Gleichungen

$$u = \tfrac{1}{2} \cdot 2a\, S_1S_1', \quad \frac{u}{s+\delta} = \frac{4a^2}{f^2},$$

welche in Verbindung mit $s = \frac{1}{2}kt$ [Formel (1) 232]

$$\frac{S_1S_1'}{t} = \frac{4a\,(s+\delta)}{f^2 \cdot t} = \frac{2ak\left(1+\frac{\delta}{s}\right)}{f^2}$$

geben.

Wenn wir jetzt $t = 0$ machen, so wird auch s und zur selben Zeit $\frac{\delta}{s}$ gleich Null werden. Also ist $\lim \frac{S_1S_1'}{t} = \frac{2ak}{f^2}$, und die gesuchte Anziehung wird

$$\varphi = \pm \frac{k^2 a}{a^2 - c^2} \cdot \frac{1}{f^2}, \tag{4}$$

oder weil der erste Factor constant ist: die Anziehung ist dem Quadrate des Abstandes f des beweglichen Punktes vom Kraftcentrum F umgekehrt proportional (Erklärung des zweiten Keppler'schen Gesetzes).

Um nun das Vorzeichen in (4) zu bestimmen, bemerken wir, dass φ positiv oder negativ ist, je nachdem F auf der concaven oder convexen Seite der Bahn sich befindet. Weil ausserdem $a^2 - c^2$ positiv oder negativ ist, je nachdem die Curve eine Ellipse oder Hyperbel ist, müssen wir in (4) $+$ lesen, wenn die Curve 1) eine Ellipse oder 2) der vom Brennpunkte F entferntere Hyperbelzweig ist, dagegen $\div$, wenn sie 3) der dem Brennpunkte F nähere Hyperbelzweig ist.

Man kann übrigens auch statt (4) eine für alle drei genannte Curven gemeinschaftliche Formel bilden. Numerisch ist nämlich $FS_1 = 2a$; der Punkt S_1 liegt aber auf der Verlängerung von FX über X hinaus, wenn die Curve eine Ellipse ist, auf FX, wenn sie ein entfernterer Hyperbelzweig ist (siehe Fig. 2, Seite 12, wo dann nur die Namen der Brennpunkte zu vertauschen sind) und auf der Verlängerung rückwärts über F, wenn er ein näherer Hyperbelzweig ist. Rechnen wir also die Abstände auf der Geraden FX positiv in der Richtung von F nach X, so erhält man statt (4)

$$\varphi = \frac{k^2 \cdot FS_1}{2\,(a^2 - c^2)} \cdot \frac{1}{f^2}. \tag{4b}$$

Durch Einführung des Parameters $p = \pm 2 \frac{a^2 - c^2}{a}$ erhält man

$$\varphi = \pm \frac{2k^2}{p} \cdot \frac{1}{f^2}, \tag{4c}$$

wo $+$ für die Ellipse und den näheren Hyperbelzweig, $\div$ für den entfernteren, zu lesen ist. Diese Formel lässt sich noch auf den Uebergangsfall der beiden ersten dieser Fälle anwenden, wo die Curve eine Parabel ist mit dem Brennpunkte F, und wo S_1 sich ins Unendliche entfernt hat. In diesem Falle muss man die Geschwindigkeit durch den ersten Ausdruck (3) bestimmen. Die schon voraus untersuchte Wurfbewegung auf einer Parabel bildet einen Uebergangsfall von der Ellipsenbewegung zur Bewegung auf einem entfernteren Hyperbelzweige, indem dann F sich ins Unendliche entfernt hat.

234. Für die Bewegung auf einer Ellipse braucht man noch einen vierten Ausdruck der Anziehung. Nach dem Verlaufe einer gewissen Zeit T, die Umlaufszeit, wird nämlich der bewegliche Punkt wieder in den Anfangspunkt der Bewegung eintreffen, und dann periodisch ganz dieselbe Bewegung wiederholen. Die Formel (1), auf das Areal der ganzen Ellipse (181) angewandt, giebt $\pi a b = \frac{1}{2} k . T$. Man hat noch $b^2 = a^2 - c^2$. Die Formel (4) lässt sich dann für die Ellipse in

$$\varphi = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} \cdot \frac{1}{f^2} \tag{4d}$$

ändern. Man sieht, dass für diejenigen Ellipsenbewegungen, wo die Quadrate der Umlaufszeiten mit den Cuben der Brennpunktsachsen proportional sind, der erste Factor in (4) oder die Anziehung für den Abstand $f = 1$ gerechnet dieselbe ist (Erklärung des dritten Keppler'schen Gesetzes).

235. Die umgekehrten Sätze von 233. und 234. sind auch richtig. Wenn nämlich ein beweglicher Punkt von einem festen Punkte F nach dem Gesetze $\frac{K}{f^2}$ angezogen wird — wo K eine gegebene Constante und f der Abstand des beweglichen Punktes von F ist — und eine gegebene Stellung mit einer gegebenen Geschwindigkeit in einer gegebenen Richtung passirt, so wird dadurch seine Bewegung vollständig bestimmt. Wenn wir also einen Kegelschnitt finden können, auf welchem die Bewegung wegen 233. ganz denselben Bedingungen unterworfen ist, so muss der Punkt sich wirklich auf diesem in voller Uebereinstimmung mit 233. und 234. bewegen.

Wenden wir, um Anschluss an die Figur 8 zu haben, die Benennungen X, f, v, M, S_1, auf die gegebene Anfangsstellung des bewegten Punktes an. Man hat dann erstens die Gleichungen [(3) und (4b)]

$$v = \frac{k}{FM}, \quad K = \frac{k^2 \,.\, FS_1}{2(a^2 - c^2)} \tag{5}$$

Um den Kegelschnitt zu bestimmen, eliminiren wir k und erhalten dadurch, indem wir 71. und die ähnlichen Dreiecke der Figur benutzen,

$$K = \frac{v^2 \,.\, FM^2 \,.\, FS_1}{2(a^2 - c^2)} = \frac{v^2 \,.\, FM \,.\, FS_1}{2 F_1 M_1} = \frac{v^2 \,.\, FX \,.\, FS_1}{2 XS_1}, \tag{6}$$

wo $FX = f$, der aufgestellten Regel gemäss, als positiv gerechnet wird. Das Verhältniss $\frac{FS_1}{XS_1}$ wird dann auch in Beziehung auf das Vorzeichen bekannt, und S_1 wird eindeutig bestimmt durch

$$\frac{FS_1}{XS_1} = \frac{2K}{v^2 f} \text{ oder } FS_1 = \frac{2Kf}{2K - v^2 f} \tag{7}$$

Der unbekannte Brennpunkt F_1 ist dann der symmetrische Punkt von S_1 in Beziehung auf die gegebene Bahntangente (Bewegungsrichtung) in X, und die Brennpunktsachse ist der positive Werth von FS_1. Der Kegelschnitt ist also wirklich völlig bestimmt. Sein Charakter hängt auf der in 233. beschriebenen Weise von der gefundenen Lage von S_1 ab.

236. Der Umstand, dass in 235. der Punkt S_1 unabhängig von der Anfangsrichtung bestimmt ward, giebt uns wichtige allgemeine Eigenschaften der Bahnen der Punkte, die denselben Punkt X mit gegebener Geschwindigkeit in verschiedenen Richtungen passiren, während der anziehende Punkt F und die Anziehung K im Abstande Eins gegeben sind. Wir halten uns dabei an Bahnen, welche in derselben Ebene liegen.

Erstens zeigt uns die Bestimmtheit von S_1, dass für alle diese Bahnen die Brennpunktsachsen dieselbe Länge $2a$ haben, und dass sie entweder alle Ellipsen, oder (in Beziehung auf F) alle nähere Hyperbelzweige, oder alle entferntere Hyperbelzweige, oder, endlich, alle Parabeln sind. Im ersten dieser Fälle wird auch die Umlaufszeit für alle Bahnen dieselbe sein.

Weiter sehen wir, dass der dem unbekannten Brennpunkte F_1 entsprechende Leitkreis $(F, 2a)$, welcher durch S_1 gehen soll, allen diesen Bahnen gemeinschaftlich ist, und der Ort des Brenn-

punktes F_1 ist der diesen Leitkreis in S_1 berührende Kreis mit dem Centrum X. Wir werden diesen Kreis (X) nennen. Nur im Grenzfalle, wo die Bahnen Parabeln sind mit dem Brennpunkte F, ist sowohl dieser Kreis als auch der Leitkreis unendlich entfernt, und diese und die darauf gestützten Bestimmungen lassen sich dann nicht unmittelbar anwenden.

Um noch weitere Eigenschaften zu finden[1]) suchen wir die Bahnen, welche durch einen gegebenen Punkt X' gehen. Einen neuen Ort des unbekannten Brennpunktes (F_1) hat man dann in den Kreisen (X') mit dem Centrum X', welche den gemeinschaftlichen Leitkreis berühren. Bei der Bestimmung von wirklichen Bahnen, welche durch X und X' gehen, kann man jedoch von diesen Kreisen (X') nur denjenigen benutzen, dessen Berührung mit dem Leitkreise derselben Art ist wie diejenige des Kreises (X). Wenn nämlich die Bahnen Ellipsen sind, ist es nur möglich, dass der innere Kreis (X') den Kreis (X) treffen kann, und wenn sie Hyperbelzweige sind, liegt X' nur dann auf demselben Zweige wie X, wenn F_1 ein Schnittpunkt ist des Kreises (X) mit einem Kreise (X'), dessen Berührung derselben Art ist. Die Aufgabe hat also höchstens 2 wirkliche Auflösungen. Es kann aber, wenn die Bahnen hyperbolisch sind, noch zwei Bahnen geben, für welche der andere Zweig derselben Hyperbel durch X' geht.

Der Uebersichtlichkeit wegen werden wir in der folgenden Discussion erstens nur von elliptischen Bahnen sprechen. Die zwei durch X' gehenden Bahnen fallen zusammen, wenn der Kreis (X') den Kreis (X) berührt. Der Punkt X' ist dann auch das Centrum eines durch X gehenden Kreises, welcher den Kreis mit dem Centrum F, der durch den durch $S_1 Y = XS_1$ bestimmten Punkt Y der Geraden FX geht, berührt. Weil X innerhalb dieses letzten Kreises liegt, wird der Ort des Punktes X' in diesem Falle eine Ellipse mit den Brennpunkten F und X; ihre übrige Bestimmung kann dadurch gegeben werden, dass S_1 ein Scheitel sein muss.

Diese Ellipse, welche wir die Grenzellipse nennen werden, berührt in einem willkürlichen seiner Punkte X' die dadurch gehende elliptische Bahn, weil der Brennpunkt F_1 auf der Geraden XX' liegt. Umgekehrt berührt jede Bahn die Grenzellipse; der Berührungspunkt ist nämlich der Punkt, wo die Gerade FX die Bahn ausser in X schneidet.

1) Tait: On some geometrical constructions connected with the Elliptic motion of Unresisted Projectiles. Proceed. of the R Society of Edinburgh, vol. V.

Weil keine Bahn die Grenzellipse schneiden kann, und weil S_1 ausserhalb aller Bahnen liegt, so müssen die Bahnen ganz innerhalb der Grenzellipse liegen. Je nachdem ein Punkt innerhalb oder ausserhalb der Grenzellipse liegt, werden durch ihn zwei oder keine Bahn gehen.

Durch Anwendung derselben Untersuchungsweise auf die hyperbolischen Bahnen findet man den allgemeinen Satz: Die durch die gegebenen Bedingungen bestimmten Bahnen, oder wenigstens die vollständigen Kegelschnitte, wovon sie — wenn sie hyperbolisch sind — Zweige sind, berühren den Kegelschnitt mit den Brennpunkten F und X und mit einem Scheitel in dem den Bahnen gemeinschaftlichen symmetrischen Punkte S_1 des nicht gegebenen Brennpunktes F_1.

Die weitere Discussion der Lagen der hyperbolischen Bahnen und der mit ihnen verbundenen Zweige in Beziehung auf die hier gefundene Grenzcurve, schlagen wir als Uebung vor.

Uebungsaufgaben.

1) und 2). Die Bahnen in der in 236. bestimmten Reihe zu finden, welche entweder eine gegebene Gerade berühren, oder eine gegebene Excentricität haben (Möglichkeitsbedingungen).

3) Zu beweisen, dass in derselben Reihe die Tangenten in X derjenigen Bahnen, welche durch einen Punkt X' gehen, gleiche Winkel bilden mit der Tangente der Bahn, die auf der Geraden XX' die möglichst grosse Sehne abschneidet.

4) Einem von einem gegebenen Punkte ausgehenden beweglichen Punkte, welcher einer gegebenen Anziehung von einem festen Punkte im umgekehrten Verhältnisse der Quadrate der Abstände unterworfen ist, eine solche Anfangsbewegung mitzutheilen, dass er bis in einen andern gegebenen Punkt mit der möglichst kleinen oder möglichst grossen Geschwindigkeit gelangt.

3) Anziehung proportional mit dem Abstande.

237. Aufgabe: Ein Punkt X bewegt sich auf einem Kegelschnitte, indem er einer Anziehung an das Centrum O, und keiner anderen Kraft unterworfen ist. Die Grösse dieser Anziehung zu finden.

Betrachten wir vorläufig nur den Fall, wo die Curve eine Ellipse ist. Sei v die Geschwindigkeit des Punktes, und d der Abstand des Centrums von der Bahntangente in X, k eine Con-

stante und Y ein Endpunkt des dem Durchmesser OX conjugirten Durchmessers. Dann ist [232. (2)]

$$v = \frac{k}{d} = \frac{k \cdot OY}{a \cdot b},$$

wo a und b die Halbachsen sind (149). Der conjugirte Halbmesser OY stellt also die Geschwindigkeit des Punktes X auf der in 232. beschriebenen Weise dar, und die Anziehung wird der Geschwindigkeit des Punktes Y — welcher sich mit OX parallel bewegt — mit $\frac{k}{a \cdot b}$ multiplicirt, gleich sein. Weil nun der Ellipsensector XOY den constanten Werth $\frac{\pi ab}{4}$ hat, so wird OY Sectoren beschreiben vom selben Areal wie die gleichzeitig von OX beschriebenen. Die Geschwindigkeit von Y wird dann mittelst der obigen Formel bestimmt und ist $\frac{k \cdot OX}{a \cdot b}$. Also ist die Anziehung

$$\varphi = \frac{k^2}{a^2 \cdot b^2} \cdot OX$$

oder mit dem Abstande direct proportional. Die Lage der Convexität zeigt, dass φ positiv sein muss.

War die Curve eine Hyperbel, so konnte man die Geschwindigkeit auf dieselbe Weise darstellen, indem dann Y der Endpunkt einer auf dem conjugirten Durchmesser von OX abgesetzten und der halben Länge dieses conjugirten Durchmessers gleichen Strecke OY ist. Wegen unserer Bestimmung dieser Strecke ist die Gerade XY mit der einen Asymptote parallel, und die Strecke XY wird von der anderen Asymptote halbirt. Man kann also die in 170. beschriebene Tansformation mit der Asymptote, welche XY halbirt, als Transformationsachse so ausführen, dass die Punkte Y und X sich entsprechen. Weil X und Y (abgesehen vom Vorzeichen) denselben Abstand von der Transformationsachse haben, werden sich entsprechende Areale gleich sein (170, 8). Der Punkt Y wird eine Hyperbel mit denselben Asymptoten durchlaufen (170, 11). Diese hat weiter, wegen der hier gegebenen Bestimmung, dieselben Lagen und Grössen aller conjugirten Durchmesserpaare, also auch der Achsen; nur ist überall der schneidende Durchmesser mit dem nicht schneidenden vertauscht.

Durch Benutzung dieser sogenannten conjugirten Hyperbel findet man hier

$$v = \frac{k \cdot OY}{a \cdot b}, \quad \varphi = -\frac{k^2}{a^2 b^2} \cdot OX,$$

wo OX positiv gerechnet ist; der Sinn der Convexität zeigt nämlich, dass φ negativ sein muss. Setzen wir $OX = a'$, $OY = b'$ so haben wir also

$$v = \frac{k \cdot b'}{ab}, \quad \varphi = \pm \frac{k^2 \cdot a'}{a^2 b^2} = K \cdot a'$$

wo wir $+$ für die Ellipse, $\div$ für die Hyperbel lesen, und wo K die Anziehung im Abstande Eins ist.

238. Umgekehrt wird ein von einem festen Punkte O im directen Verhältnisse der Abstände angezogener Punkt X sich auf einer Ellipse oder Hyperbel mit dem Centrum O bewegen. — Eine solche Curve, auf welcher X sich wegen 237. bewegen muss, lässt sich nämlich durch die Anziehung K im Abstande Eins, durch die Geschwindigkeit v und die Bewegungsrichtung in einem Punkte der Bahn bestimmen. Dieser Punkt giebt die Lage und Grösse a' eines Halbmessers, die gegebene Richtung giebt die Lage des conjugirten Durchmessers, und aus den letzten Gleichungen 237. leitet man zur Bestimmung der Länge b' des conjugirten Halbmessers die Gleichung $\frac{v^2}{b'^2} = \pm K$ her.

239. In den verschiedenen hier untersuchten Fällen der Centralbewegung konnte man durch Einführung von Ausdrücken der Sectorareale (siehe Abschnitt X.) in die Formel (1) 232. eine genauere Bestimmung der Bewegung erhalten. In dieser Beziehung werden wir uns jedoch auf den Fall beschränken, wo der bewegliche Punkt X sich auf einer Ellipse bewegt und vom Centrum O angezogen wird.

Construiren wir in diesem Falle einen Kreis über einer Achse $A_1 A = 2a$ der Ellipse als Durchmesser, so kann man dem beweglichen Punkte X den auf derselben Seite der Achse befindlichen Punkt X' des Kreises, welcher dieselbe Projection X'' auf der Achse hat wie X, entsprechen lassen (170, 9). Dann ist der Ellipsensector $AOX\ (= s)$ dem Kreissector AOX' mit $\frac{b}{a}$ multiplicirt gleich. Man erhält aus 232. (1), indem man die Zeit t von dem Augenblicke an rechnet, in welchem X den Scheitel A passirt, dass der Bogen:

$$AX' = \frac{k \cdot t}{b} = a\sqrt{K} \cdot t,$$

weil Sector $AOX' = \frac{1}{2} a \cdot AX'$ und $k = ab\sqrt{K}$ ist (237). Der Punkt X' wird sich also mit der constanten Geschwindigkeit $a\sqrt{K}$ auf dem Kreise bewegen.

Aus der dadurch gegebenen anschaulichen Darstellung der Bewegung des Punktes X auf der Ellipse kann man die folgenden Ausdrücke herleiten. Die Umlaufszeit T ist dieselbe wie für den Punkt X' auf dem Kreise. Also ist

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{K}} \qquad (1)$$

Die Projection X'' der Punkte X und X' auf die Achse $A_1 A$ wird im Augenblicke t durch

$$O X'' = a \cos (\sqrt{K} \,.\, t) \qquad (2)$$

bestimmt, weil $\sphericalangle A O X' = \frac{A X'}{a} = \sqrt{K} \,.\, t$ ist. Dadurch ist die Bewegung dieser Projection bestimmt. Ihre Geschwindigkeit v'' ist die Projection der Geschwindigkeit des Punktes X', also

$$v'' = - a \sqrt{K} \sin (\sqrt{K} \,.\, t), \qquad (3)$$

wo das Vorzeichen so gewählt ist, das v'' positiv oder negativ wird, je nachdem $O X''$ wächst oder abnimmt.

Diese Formeln (1)—(3) sind von der Grösse der Achse b unabhängig. Sie behalten also ihre Gültigkeit für $b = O$, das heist: wenn der Punkt sich auf einer Geraden — die durch das Kraftcentrum O gehen muss — bewegt.
